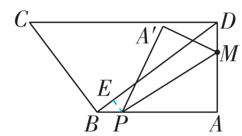
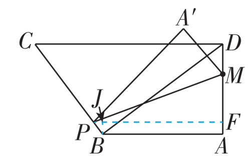
关于直线 PM 的对称点是点 A'，$\therefore \angle AMP=\angle A'MP$，$\therefore \tan\angle A'MP=\tan\angle AMP=\frac{AP}{AM}=\frac{19}{12}$.

如图(4)，当点 P 在 BC 上时，过点 P 作 $PF\perp AD$ 于 F，过点 B 作 $BJ\perp PF$ 于 J，$\therefore$ 四边形 $ABJF$ 是矩形，$\therefore AB=JF=8$，$AF=BJ$. 同(2)易知 $\triangle BJP\backsim\triangle BAD$，$\therefore \frac{BP}{BD}=\frac{BJ}{AB}$，$\therefore \frac{1}{10}=\frac{BJ}{8}$，$\therefore BJ=\frac{4}{5}$，$\therefore AF=\frac{4}{5}$，$PJ=\sqrt{PB^2-BJ^2}=\frac{3}{5}$，$\therefore MF=\frac{16}{5}$，$PF=\frac{43}{5}$，$\therefore \tan\angle A'MP=\tan\angle AMP=\frac{PF}{MF}=\frac{43}{16}$. 综上所述，$\tan\angle A'MP$ 的值为 $\frac{19}{12}$ 或 $\frac{43}{16}$.



图(3)



图(4)

第二章 二次函数

1 二次函数

刷基础

1. A 【解析】根据题意得 $m-1=2$，$\therefore m=3$. 故选 A.

2. A 【解析】①$y=2(x+1)(x-3)=2(x^2-2x-3)=2x^2-4x-6$，是二次函数；②该函数是二次函数；③该函数不是二次函数；④该函数的分母含有字母，不是二次函数；⑤$y=x^2-(x+4)(x+2)=x^2-x^2-6x-8=-6x-8$，是一次函数；⑥$y=ax^2+bx+c$，不一定是二次函数；⑦$y=\frac{x^4}{x^2}$ 的右边是分式，不是二次函数；⑧等号右边是分式，不是二次函数；⑨含有二次根式，不是二次函数. 故选 A.

归纳总结 判断函数是否为二次函数必须满足下面 3 个条件：①等号右边必须是关于自变量的整式；②自变量的最高次数是 2；③二次项系数不为 0.

3. C 【解析】A 选项，$y=3x^2-2x+5$，二次项系数是 3，故不合题意；B 选项，$y=x^2-3x+2$，二次项系数是 1，故不合题意；C 选项，$y=-3x^2-x$，二次项系数是 -3，故符合题意；D 选项，$y=x^2-3$，二次项系数是 1，故不合题意. 故选 C.

4. $-1\quad 0\quad -2$ 【解析】$\because y=(x-2)(1-x)-3x=-x^2-2$，$\therefore$ 该二次函数的二次项系数是 -1，一次项系数是 0，常数项是 -2. 故答案为 -1，0，-2.

5. A 【解析】根据题意得 $w=(x-30)y$，即 $w=(x-30)(-2x+80)$. 故选 A.

6. $y=a(1+x)^2$ 【解析】根据题意得 $y=a(1+x)^2$. 故答案为 $y=a(1+x)^2$.

7. 【解】(1)$\because$ 篱笆总长为 35 m，鸡场的边 AB 长为 x m，$\therefore BC=35-3x+2+2=(39-3x)$m，故答案为 $(39-3x)$m.

(2)$S=x(39-3x)=-3x^2+39x$.

答：S 关于 x 的函数关系式为 $S=-3x^2+39x$.

(3)能围成总面积为 108 m² 的两个长方形养鸡场. 根据题意得 $-3x^2+39x=108$，解得 $x_1=4$，$x_2=9$. $\because$ 墙的长度 $a=20$ m，$\therefore \begin{cases}39-3x\leqslant 20,\\39-3x\geqslant 2,\end{cases}$ $\therefore \frac{19}{3}\leqslant x\leqslant\frac{37}{3}$，$\therefore x_1=4$ 不符合题意，舍去，$\therefore AB$ 的长为 9 m.

刷易错

8. D 【解析】$\because$ 函数 $y=(k-2)x^{k^2-2k+2}+kx+1$ 是关于 x 的二次函数，$\therefore k-2\neq 0$，$k^2-2k+2=2$，$\therefore k=0$. 故选 D.

易错警示 二次函数的一般形式 $y=ax^2+bx+c$(a，b，c 是常数，$a\neq 0$)中，二次项系数 $a\neq 0$，解此类题易出现只关注满足指数的要求，而忽略对二次项系数的限制，从而导致错误.

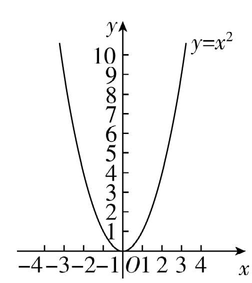
2 二次函数的图象与性质

课时 1 二次函数 $y=x^2$ 与 $y=-x^2$ 的图象与性质

刷基础

1. A 【解析】二次函数 $y=x^2$ 的图象最低点是原点，开口向上，所以其图象经过第一、二象限. 故选 A.

2. A 【解析】二次函数 $y=x^2$ 图象如图所示. 若 $y_1<y_2<y_3$，则 $m>-0.5$，故 A 错误，符合题意. 当 $y_1=y_3$ 时，点 (m,y_1) 和 $(m+2,y_3)$ 关于对称轴 y 轴对称，$\therefore m+m+2=0$，$\therefore m=-1$，$\therefore m+1=0$，$\therefore y_2=0$，故 B 正确，不符合题意. 若 $m=-\frac{3}{4}$，则 $m+1=\frac{1}{4}$，$m+2=\frac{5}{4}$. $\because \left|\frac{1}{4}\right|<\left|-\frac{3}{4}\right|<\left|\frac{5}{4}\right|$，$\therefore y_2<y_1<y_3$，故 C 正确，不符合题意. $\because y_3-y_2=(m+2)^2-(m+1)^2=2m+3$，$y_2-y_1=(m+1)^2-m^2=2m+1$，$2m+3>2m+1$，$\therefore$ 无论 m 取何值，都有 $y_3-y_2>y_2-y_1$，故 D 正确，不符合题意.



题意. 故选 A.

3. (1)顶点　(0,0)　(2)抛物线　上　y 轴(或直线 $x=0$)　(3)减小　增大　【解析】(1)图象与 x 轴的交点也是它的顶点,这个点的坐标是(0,0).(2)二次函数 $y=x^2$ 的图象是一条抛物线,它的开口向上,它的对称轴为 y 轴(或直线 $x=0$).(3)当 $x<0$ 时,随着 x 值的增大,y 的值减小;当 $x>0$ 时,随着 x 值的增大,y 的值增大.

4.【解】(1)当 $x=m$ 时,$y=m^2$,∴ 点 B 的纵坐标为 m^2. 故答案为 m^2.

(2)由题意,得 $|-6m+7-m^2|=2$,即 $|m^2+6m-7|=2$,∴ $m^2+6m-7=2$ 或 $m^2+6m-7=-2$.

解 $m^2+6m-9=0$,得 $m=-3\pm3\sqrt{2}$.

解 $m^2+6m-5=0$,得 $m=-3\pm\sqrt{14}$.

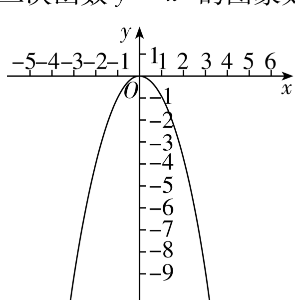
又∵ $m<0$,∴ $m=-3-3\sqrt{2}$ 或 $-3-\sqrt{14}$.

5. C　【解析】

序号	分析	结论
①	∵ $y=-x^2$,∴ 抛物线开口向下,顶点是原点	正确
②	∵ $y=-x^2$,∴ 抛物线的对称轴为 y 轴,当 $x<0$ 时,y 随 x 的增大而增大;当 $x>0$ 时,y 随 x 的增大而减小,∴ 当 $x>1$ 时,y 随 x 的增大而减小	正确
③	当 $x=-1$ 时,$y=-1$;当 $x=2$ 时,$y=-4$;当 $x=0$ 时,$y=0$,∴ 当 $-1<x<2$ 时,$-4<y\leqslant0$	不正确
④	∵ $y=-x^2$,∴ 抛物线关于 y 轴对称. ∵ (m,p),(n,p) 在抛物线上,∴ $m+n=0$	正确

6. 4　【解析】将点 M 坐标代入 $y=-x^2$,得 $a=-(-2)^2=-4$,所以点 M 的坐标为 $(-2,-4)$. 同理可得,点 N 的坐标为 $(2,-4)$,所以 $MN=2-(-2)=4$. 故答案为 4.

7.【解】画出二次函数 $y=-x^2$ 的图象如图所示.



(1)把 $x=\frac{3}{2}$ 代入 $y=-x^2$,得 $y=-\frac{9}{4}$. 故答案为 $-\frac{9}{4}$.

(2)把 $y=-8$ 代入 $y=-x^2$,得 $-8=-x^2$,解得 $x=\pm2\sqrt{2}$. 故答案为 $\pm2\sqrt{2}$.

(3)$-9<y\leqslant0$. 由图象可知,当 $-2<x<3$ 时,y 的取值范围是 $-9<y\leqslant0$.

(4)$-2<x<-1$ 或 $1<x<2$. 由图象可知,当 $-4<y<-1$ 时,x 的取值范围是 $-2<x<-1$ 或 $1<x<2$.

8. B　【解析】二次函数 $y=x^2$ 和 $y=-x^2$ 的图象都关于 y 轴对称,两图象的顶点相同,两图象的开口方向不同,$y=x^2$ 的图象开口向上,$y=-x^2$ 的图象开口向下,点 $(-1,1)$ 只在抛物线 $y=x^2$ 上,所以②③④正确. 故选 B.

课时 2　二次函数 $y=ax^2$ 与 $y=ax^2+c$ 的图象与性质

刷基础

1. B　【解析】∵ 函数 $y=ax^2(a\neq0)$ 的图象经过点 $(-1,2)$,∴ $a=2$,∴ $y=2x^2$. 当 $x=1$ 时,$y=2$;当 $x=2$ 时,$y=8$,∴ 函数 $y=ax^2(a\neq0)$ 的图象必经过点 $(1,2)$,故选 B.

2. B　【解析】对于二次函数 $y=2x^2$,∵ $a=2>0$,∴ 函数图象开口向上,对称轴是 y 轴,顶点是原点,y 的最小值为 0,当 $x<0$ 时,y 随 x 的增大而减小,∴ 选项 A,C,D 正确,选项 B 错误. 故选 B.

技巧点拨 抛物线的开口方向和开口大小由二次项系数 a 决定. $a>0$,抛物线开口向上;$a<0$,抛物线开口向下. a 的绝对值越大,开口越小;a 的绝对值越小,开口越大.

3. $d<c<b<a$　【解析】∵ 抛物线 $y=ax^2$,$y=bx^2$ 的开口向上,且抛物线 $y=ax^2$ 的开口更小,∴ $a>b>0$. ∵ 抛物线 $y=cx^2$,$y=dx^2$ 的开口向下,且抛物线 $y=dx^2$ 的开口更小,∴ $0>c>d$. 故 $d<c<b<a$.

4. $\frac{1}{9}\leqslant a\leqslant3$　【解析】∵ 抛物线的表达式为 $y=ax^2$,∴ 当抛物线经过 $(1,3)$ 时,$a=3$;当抛物线经过 $(3,1)$ 时,$a=\frac{1}{9}$. ∵ 抛物线 $y=ax^2$ 与正方形的边有公共点,∴ $\frac{1}{9}\leqslant a\leqslant3$,故答案为 $\frac{1}{9}\leqslant a\leqslant3$.

5. B　【解析】∵ 函数 $y=-2x^2+1$ 的图象的对称轴为 y 轴,∴ $A(-1,y_1)$,$B(2,y_2)$ 在对称轴两侧. ∵ 抛物线开口向下,且 $|-1|<|2|$,∴ $y_1>y_2$. 故选 B.

6. C　【解析】当 $a>0$ 时,$-a<0$,函数 $y=ax^2-a(a\neq0)$ 的图象开口向上,顶点在 y 轴的负半轴;当 $a<0$ 时,$-a>0$,函数 $y=ax^2-a(a\neq0)$ 的图象开口向下,顶点在 y 轴的正半轴. 故选 C.

刷有所得 对于二次函数 $y=ax^2+c$,当 $a<0$ 时,函数有最大值;当 $a>0$ 时,函数有最小值.

7. -5　【解析】∵ 二次函数 $y=3x^2-5$ 的图象开口向上,对称轴为 y 轴,顶点在 y 轴的负半轴,∴ 当 $-1\leqslant x\leqslant4$ 且 y 取最小值时,$x=0$,∴ y 的最小值为 -5,故答案为 -5.

8. 10　【解析】∵ 抛物线 $y=ax^2+5$ 与 y 轴交于点 A,∴ 点 A 坐标为 $(0,5)$. ∵ 过点 A 且与 x 轴平行的直线交抛物线 $y=\frac{1}{5}x^2$ 于点 B,C,当 $y=5$

时，$5=\frac{1}{5}x^2$，解得 $x=\pm5$，∴ 点 B 坐标为 $(-5,5)$，点 C 坐标为 $(5,5)$，∴ $BC=5-(-5)=10$. 故答案为 10.

9. C 【解析】由题知，把抛物线 $y=x^2-1$ 向上平移 3 个单位可得抛物线 $y=x^2-1+3=x^2+2$. 故选 C.

10.【解】能. 设平移后的图象的函数表达式为 $y=\frac{1}{3}x^2+k$. 把 $(3,-3)$ 代入，得 $-3=\frac{1}{3}\times3^2+k$，解得 $k=-6$，∴ 把 $y=\frac{1}{3}x^2$ 的图象向下平移 6 个单位长度，得到的图象经过点 $(3,-3)$.

刷易错

11. C 【解析】∵ 抛物线 $y=ax^2$ 与 $y=4x^2$ 的形状相同，∴ $|a|=4$，∴ $a=\pm4$. 故选 C.

易错警示
抛物线形状相同，但是抛物线的开口方向可能不同，一定要考虑全面，不要漏解.

课时 3　二次函数 $y=a(x-h)^2$ 与 $y=a(x-h)^2+k$ 的图象与性质

刷基础

1. B 【解析】由 $y=-2(x+3)^2$ 得抛物线开口向下，对称轴为直线 $x=-3$，顶点坐标为 $(-3,0)$，当 $x<-3$ 时，y 随 x 的增大而增大，当 $x>-3$ 时，y 随 x 的增大而减小. 故选 B.

2. B 【解析】当 $x=-3$ 时，$y_1=\frac{2}{3}\times(-3+1)^2=\frac{8}{3}$；当 $x=-1$ 时，$y_2=\frac{2}{3}\times(-1+1)^2=0$；当 $x=2$ 时，$y_3=\frac{2}{3}\times(2+1)^2=6$. ∵ $0<\frac{8}{3}<6$，∴ $y_2<y_1<y_3$，故选 B.

3. $y=-2(x+3)^2$ 【解析】根据题意设二次函数的表达式为 $y=a(x-h)^2(a\neq0)$. 根据题意得，$a=-2$，$h=-3$，∴ 这个二次函数的表达式是 $y=-2(x+3)^2$，故答案为 $y=-2(x+3)^2$.

4. $a\leqslant3$ 【解析】∵ 二次函数 $y=-2(x-a)^2$ 的图象开口向下，对称轴为直线 $x=a$，∴ 当 $x>a$ 时，y 随 x 的增大而减小. ∵ 当 $x>3$ 时，y 随 x 的增大而减小，∴ $a\leqslant3$，故答案为 $a\leqslant3$.

5. 675 【解析】对于二次函数 $y=3(x-3)^2$，该函数图象开口向上，对称轴为直线 $x=3$. ∵ 当 x 分别取 $x_1,x_2(x_1\neq x_2)$ 时，函数值相等，∴ $x_1+x_2=6$，∴ $3x_1+3x_2=3(x_1+x_2)=18$，∴ 当 $x=18$ 时，函数值为 $3\times(18-3)^2=675$. 故答案为 675.

6. D 【解析】二次函数 $y=(x+h)^2+k$ 图象的顶点为 $(-h,k)$. 由题图得图象顶点在第三象限，∴ $-h<0,k<0$，∴ $h>0,k<0$，∴ 点 $P(h,k)$ 在第四象限. 故选 D.

7. C 【解析】∵ 函数 $y=(x-1)^2-2\ 025$，∴ 抛物线开口向上，对称轴为直线 $x=1$. ∵ $A(a,b)$，$B(a+2,c)$，$b<c$，∴ 点 A 到对称轴的距离小于点 B 到对称轴的距离，∴ 当 $a\geqslant1$ 时，$b<c$ 恒成立；当 $a<1$ 时，$a+2-1>1-a$，解得 $a>0$，∴ $a>0$，故选 C.

8. D 【解析】∵ 二次函数 $y=-(x-t)^2+5$（t 为常数），∴ 该函数图象的对称轴是直线 $x=t$，图象开口向下. ∵ 当 $2\leqslant x\leqslant4$ 时，y 的最大值为 -4，∴ 当 $t\leqslant2$ 时，$y=-(2-t)^2+5=-4$，解得 $t_1=-1$，$t_2=5$（舍去）；当 $2<t<4$ 时，y 的最大值是 5，与题意不符；当 $t\geqslant4$ 时，$y=-(4-t)^2+5=-4$，解得 $t_3=1$（舍去），$t_4=7$. 综上可得，t 的值是 -1 或 7. 故选 D.

9. $(1,0)$ 【解析】由二次函数 $y=a(x+1)^2+2$ 可知图象对称轴为直线 $x=-1$. 由题图得图象在对称轴左侧与 x 轴交点为 $(-3,0)$，根据对称性，可得图象在对称轴右侧与 x 轴交点的坐标是 $(1,0)$.

刷有所得
二次函数 $y=a(x-h)^2+k$ 的图象的平移规律：左加右减，上加下减.

10. B 【解析】将二次函数 $y=(x+1)^2+3$ 的图象向右平移 2 个单位长度，再向下平移 1 个单位长度，所得抛物线对应的函数表达式为 $y=(x+1-2)^2+3-1$，即 $y=(x-1)^2+2$. 故选 B.

11.【解】(1) ∵ 抛物线 $y=a(x-h)^2+k$ 先向左平移 2 个单位长度，再向上平移 3 个单位长度，得到二次函数 $y=-2x^2+1$ 的图象，∴ $a=-2$，$-h+2=0$，$k+3=1$，解得 $h=2$，$k=-2$. 故答案为 $-2,2,-2$.

(2) 由 (1) 得二次函数 $y=a(x-h)^2+k$ 的表达式为 $y=-2(x-2)^2-2$，∴ 函数图象开口向下，对称轴为直线 $x=2$，顶点坐标为 $(2,-2)$.

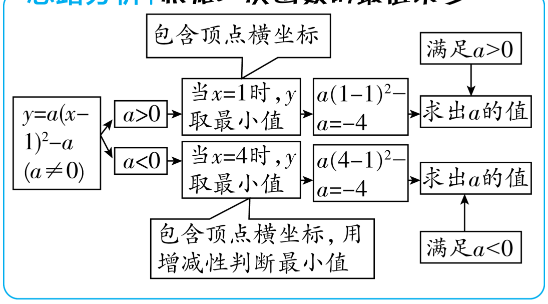
刷提升

1. B 【解析】A 选项，∵ 一次函数 $y=cx+a$ 的图象与 y 轴交于负半轴，∴ $a<0$. ∵ 二次函数 $y=a(x-2)^2+c$ 的图象开口向上，∴ $a>0$，相矛盾，故 A 错误. B 选项，∵ 一次函数 $y=cx+a$ 的图象经过第一、二、四象限，∴ $a>0,c<0$. ∵ 二次函数 $y=a(x-2)^2+c$ 的图象开口向上，顶点 $(2,c)$ 在第四象限，∴ $a>0,c<0$，一致，故 B 正确. C 选项，∵ 二次函数 $y=a(x-2)^2+c$ 的图象的对称轴为直线 $x=2$，在 y 轴右侧，故 C 错误. D 选项，∵ 一次函数 $y=cx+a$ 的图象经过第一、二、三象限，∴ $c>0$. ∵ 抛物线 $y=a(x-2)^2+c$ 的顶点 $(2,c)$ 在第四象限，∴ $c<0$，相矛

盾,故 D 错误. 故选 B.

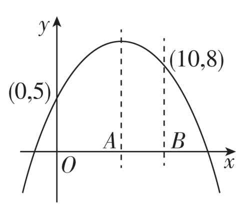
2. D

思路分析|根据二次函数的最值求参

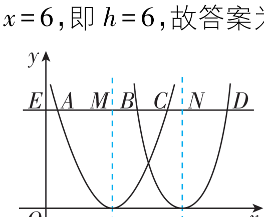


【解析】抛物线 $y=a(x-1)^2-a(a\neq0)$ 的对称轴为直线 $x=1$. ①当 $a>0$ 时,当 $-1\le x<1$ 时,y 随 x 的增大而减小,当 $1<x\le4$ 时,y 随 x 的增大而增大,∴ 当 $x=1$ 时,y 取得最小值,∴ $y=a(1-1)^2-a=-4$,∴ $a=4$;②当 $a<0$ 时,当 $-1\le x<1$ 时,y 随 x 的增大而增大,当 $1<x\le4$ 时,y 随 x 的增大而减小. ∵ $|1-(-1)|<|4-1|$,∴ 当 $x=4$ 时,y 取得最小值,∴ $y=a(4-1)^2-a=-4$,∴ $a=-\frac{1}{2}$. 综上,a 的值为 $-\frac{1}{2}$ 或 4. 故选 D.

3. C 【解析】∵ 二次函数 $y=a(x-h)^2+k$,∴ 抛物线的对称轴为直线 $x=h$. ∵ $a<0$,∴ 抛物线开口向下. 如图,∵ 图象经过 $(0,5)$,$(10,8)$ 两点,$0<h<10$,∴ 对称轴在 $x=5$ 与 $x=10$ 之间(不包含 $x=5$ 和 $x=10$),故结论Ⅰ不正确. ∵ 图象经过 $(0,5)$,$(10,8)$ 两点,$0<h<10$,对称轴为直线 $x=h$,∴ 点 $(10,8)$ 不是抛物线的顶点,函数的最大值大于 8,∴ 满足条件的点 P 有两个,故结论Ⅱ正确. 故选 C.



4. 6 【解析】分别作出两抛物线的对称轴交 AD 于 M,N,令直线 AD 交 y 轴于 E,如图. ∵ 平行于 x 轴的直线与两条抛物线 $y_1=a(x-h)^2$ 和 $y_2=b(x-13)^2(a<b)$ 相交于点 A,B,C,D,∴ 抛物线 $y_2=b(x-13)^2$ 的对称轴为直线 $x=13$,即 $EN=13$. ∵ $AB=8$,$BC=3$,$CD=6$,∴ $CM=\frac{1}{2}(AB+BC)=\frac{11}{2}$,$BN=\frac{1}{2}(BC+CD)=\frac{9}{2}$. ∵ $EM+CM+BN-BC=EN$,∴ $EM+\frac{11}{2}+\frac{9}{2}-3=13$,∴ $EM=6$,∴ 抛物线 $y_1=a(x-h)^2$ 的对称轴为直线 $x=6$,即 $h=6$,故答案为 6.



关键点拨 掌握抛物线上关于对称轴对称的两点到对称轴的距离相等是解题的关键.

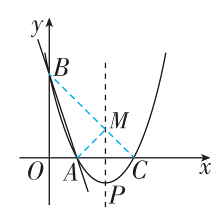
5. $(0,-1)$或$(6,-1)$ 【解析】由抛物线 L 的表达式可知抛物线 L 的对称轴为直线 $x=3$,顶点坐标为 $(3,-1)$,由条件可得 $-2+m=2\times3$,∴ $m=8$,∴ $B(8,3)$,∴ $AB=8-(-2)=10$. ∵ 抛物线 L 向左或向右平移后得到抛物线 M,∴ 设抛物线 M 的顶点 $C(n,-1)$,∴ $AC^2=(n+2)^2+(-1-3)^2=n^2+4n+20$,$BC^2=(n-8)^2+(-1-3)^2=n^2-16n+80$. ∵ $\triangle ABC$ 是以 AB 为斜边的直角三角形,∴ $n^2+4n+20+n^2-16n+80=10^2=100$,整理得 $n^2-6n=0$,解得 $n_1=0$,$n_2=6$,∴ 点 C 的坐标为 $(0,-1)$ 或 $(6,-1)$. 故答案为 $(0,-1)$ 或 $(6,-1)$.

思路分析 (1)由条件可先求得 A,B 的坐标,代入抛物线表达式可求得 a,k 的值. (2)由(1)可确定抛物线表达式,连接 BC 交抛物线对称轴于点 M,则 M 即为所求. 由 B,C 的坐标可求得直线 BC 的表达式,从而求得 M 点的坐标,即可求出 $\triangle ABM$ 周长的最小值.

6. 【解】(1)在 $y=-3x+3$ 中,令 $y=0$,可得 $x=1$,令 $x=0$,可得 $y=3$,∴ $A(1,0)$,$B(0,3)$. ∵ 抛物线 $y=a(x-2)^2+k$ 经过 A,B 两点,

∴ $\begin{cases}a+k=0,\\4a+k=3,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=1,\\k=-1.\end{cases}$

(2)存在. 由(1)可知抛物线表达式为 $y=(x-2)^2-1$,∴ 抛物线的对称轴为直线 $x=2$. 令 $y=0$,可得 $x=1$ 或 $x=3$,∴ $C(3,0)$. 连接 BC 交抛物线对称轴于点 M,连接 MA,如图. ∵ A,C 两点关于对称轴对称,∴ $AM=MC$,此时 $BM+AM$ 的值最小,即 $\triangle ABM$ 的周长最小. ∵ $B(0,3)$,$C(3,0)$,∴ 可设直线 BC 的表达式为 $y=mx+3(m\neq0)$. 把 $C(3,0)$ 代入可求得 $m=-1$,∴ 直线 BC 的表达式为 $y=-x+3$. 当 $x=2$ 时,可得 $y=1$,∴ $M(2,1)$,∴ 存在满足条件的 M 点,此时 $BM+AM=BM+CM=BC=\sqrt{3^2+3^2}=3\sqrt{2}$. ∵ $AB=\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}$,∴ $\triangle ABM$ 的周长的最小值为 $AB+AM+BM=AB+BC=3\sqrt{2}+\sqrt{10}$.



刷素养

7. 【解】(1)$\triangle BCM$ 是直角三角形. 理由如下:将 $y=0$ 代入 $y=(x+1)^2-4$ 中,得 $(x+1)^2-4=0$,解得 $x_1=-3$,$x_2=1$,∴ $A(1,0)$,$B(-3,0)$. 易得顶点 M 的坐标为 $(-1,-4)$,点 C 的坐标为 $(0,-3)$. 在 Rt$\triangle BOC$ 中,由勾股定理得 $BC^2=3^2+3^2=18$. ∵ $CM^2=[(-3)-(-4)]^2+1^2=2$,$BM^2=[(-1)-(-3)]^2+4^2=20$,∴ $BC^2+CM^2=BM^2$,∴ $\triangle BCM$ 是直角三角形.

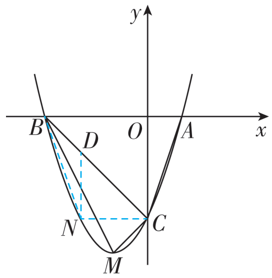
(2)存在. 由(2)可知,$\triangle BCM$ 是直角三角形,$\angle BCM=90^\circ$,$BC=3\sqrt{2}$,$CM=\sqrt{2}$,

∴ $S_{\triangle BCM}=\frac{1}{2}\times BC\times CM=3$.

设点 N 的坐标为 (t,t^2+2t-3).

①当点 N 位于 x 轴的下方时,点 N 只能位于直线 BC 的下方. 如图,过点 N 作 $ND//y$ 轴交

BC 于点 D，连接 BN，CN. 易求直线 BC 的表达式为 $y=-x-3$，$\therefore D(t,-t-3)$，$\therefore DN=(-t-3)-(t^2+2t-3)=-t^2-3t$，$\therefore S_{\triangle BCN}=S_{\triangle BDN}+S_{\triangle CDN}=-\dfrac{3}{2}t^2-\dfrac{9}{2}t$. 由题意得 $S_{\triangle BCN}=S_{\triangle BCM}$，$\therefore -\dfrac{3}{2}t^2-\dfrac{9}{2}t=3$，解得 $t_1=-2$，$t_2=-1$（舍去），$\therefore$ 点 N 的坐标为 $(-2,-3)$.



②当点 N 位于 x 轴的上方时，过点 N 作 $NE\perp x$ 轴于点 E，连接 AN，BN，

则 $S_{\triangle ABN}=\dfrac{1}{2}\times AB\times NE=2t^2+4t-6$.

由题意得 $S_{\triangle ABN}=S_{\triangle BCM}$，$\therefore 2t^2+4t-6=3$，解得 $t=\dfrac{-2\pm\sqrt{22}}{2}$，$\therefore$ 点 N 的坐标为 $\left(\dfrac{-2+\sqrt{22}}{2},\dfrac{3}{2}\right)$ 或 $\left(\dfrac{-2-\sqrt{22}}{2},\dfrac{3}{2}\right)$.

综上所述，共存在 3 个满足条件的点 N，它们的坐标分别为 $(-2,-3)$，$\left(\dfrac{-2+\sqrt{22}}{2},\dfrac{3}{2}\right)$，$\left(\dfrac{-2-\sqrt{22}}{2},\dfrac{3}{2}\right)$.

课时 4 二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象与性质

刷基础

1. C 【解析】$\because y_1=x^2+2x+1=(x+1)^2$，$y_2=x^2+2x-1=(x+1)^2-2$，$\therefore$ 抛物线 $C_1:y_1=x^2+2x+1$ 向下平移 2 个单位后得到抛物线 $C_2:y_2=x^2+2x-1$，$\therefore$ 点 $P(m,n)$ 平移后的对应点 Q 的坐标是 $(m,n-2)$，故选 C.

归纳总结 解决抛物线平移问题的常用方法：(1) 看顶点坐标的变化，根据平移后的顶点坐标写出新的表达式；(2) 根据平移规律“左加右减、上加下减”求解.

2. D 【解析】$\because$ 抛物线 $y=x^2-2mx+m^2+2m-4=(x-m)^2+2m-4$，$\therefore$ 平移后得到的抛物线的表达式为 $y=(x-m-2)^2+2m-4$，$\therefore \begin{cases}m+2=n,\\2m-4=m-n,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}m=1,\\n=3,\end{cases}$ 故选 D.

3. C 【解析】因为二次函数 $y=2x^2-4x-1$ 中 $a=2>0$，所以二次函数的图象开口向上，故①正确，不符合题意；因为当 $x=0$ 时，$y=-1$，所以函数图象与 y 轴交于点 $(0,-1)$，故②正确，不符合题意；函数图象的对称轴为直线 $x=-\dfrac{-4}{2\times2}=1$，故③错误，符合题意；因为二次函数 $y=2x^2-4x-1$ 的图象开口向上，对称轴是直线 $x=1$，所以当 $x=1$ 时，函数 y 有最小值 -3，故④正确，不符合题意. 故选 C.

易错警示 注意二次函数 $y=-ax^2+3x+2$ 的二次项系数是 $-a$，图象开口向下时 $a>0$，对称轴在 y 轴右侧；图象开口向上时 $a<0$，对称轴在 y 轴左侧.

4. D 【解析】A 选项，由一次函数 $y=ax+a$ 的图象可得 $a<0$，则 $-a>0$，此时二次函数 $y=-ax^2+3x+2$ 的图象应该开口向上，故 A 选项错误；B 选项，由一次函数 $y=ax+a$ 的图象可得 $a<0$，则 $-a>0$，此时二次函数 $y=-ax^2+3x+2$ 的图象应该开口向上，对称轴在 y 轴的左侧，故 B 选项错误；C 选项，由一次函数 $y=ax+a$ 的图象可得 $a>0$，则 $-a<0$，此时二次函数 $y=-ax^2+3x+2$ 的图象应该开口向下，故 C 选项错误；D 选项，由一次函数 $y=ax+a$ 的图象可得 $a<0$，则 $-a>0$，此时二次函数 $y=-ax^2+3x+2$ 的图象应该开口向上，对称轴在 y 轴的左侧，故 D 选项正确. 故选 D.

5. C 【解析】由题意将点 $(0,3)$ 代入二次函数 $y=x^2+2(m-1)x+m^2-2m$，得 $3=m^2-2m$，即 $m^2-2m-3=0$，解得 $m=3$ 或 $m=-1$. 当 $m=3$ 时，$y_1=(-1)^2+2\times(3-1)\times(-1)+(3)^2-2\times3=0$，满足条件 $y_1<3$；当 $m=-1$ 时，$y_1=(-1)^2+2\times(-1-1)\times(-1)+(-1)^2-2\times(-1)=8$，不满足条件 $y_1<3$. 综上所述，$m=3$. 故选 C.

6. $y_3<y_1<y_2$ 【解析】$\because (-4,m)$，$(0,m)$ 是抛物线 $y=ax^2+bx+c(a<0)$ 上的点，$\therefore$ 抛物线开口向下，对称轴是直线 $x=\dfrac{-4+0}{2}=-2$，$\therefore$ 当 $x<-2$ 时，y 随 x 的增大而增大，$(1,y_3)$ 关于直线 $x=-2$ 的对称点是 $(-5,y_3)$. $\because -5<-3<-2$，$\therefore y_3<y_1<y_2$.

7. 【解】(1) 把 $A(-1,0)$，$B(3,0)$ 代入 $y=-x^2+bx+c$ 中，得 $\begin{cases}-(-1)^2-b+c=0,\\-3^2+3b+c=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}b=2,\\c=3,\end{cases}$ $\therefore b$ 的值为 2，c 的值为 3，$\therefore$ 二次函数的表达式为 $y=-x^2+2x+3$，$\therefore -\dfrac{b}{2a}=-\dfrac{2}{-2}=1$，$\dfrac{4ac-b^2}{4a}=\dfrac{-4\times3-2^2}{-4}=4$，$\therefore$ 图象的顶点坐标为 $(1,4)$.

(2) $\because$ 由 (1) 得二次函数的表达式为 $y=-x^2+2x+3$，$\therefore$ 把 $x=-2$ 代入表达式，得 $y=-(-2)^2+2\times(-2)+3=-5$，把 $x=2$ 代入表达式，得 $y=-2^2+2\times2+3=3$. $\because$ 点 $P(m,n)$ 在该二次函数图象上，且到 y 轴的距离小于 2，$\therefore -2<m<2$. 又 $\because$ 二次函数图象顶点坐标为 $(1,4)$，$\therefore -5<n\leq4$.

8. B 【解析】$\because$ 抛物线开口向下，与 y 轴交于正半轴，$\therefore a<0$，$c>0$. $\because$ 对称轴为直线 $x=-\dfrac{b}{2a}=1$，$\therefore b=-2a>0$，$\therefore abc<0$，故①正确. $\because b=-2a$，$\therefore 2a+b=0$，故②正确. $\because$ 当 $x=0$ 时，$y>$

0，对称轴为直线 $x=1$，∴ 当 $x=2$ 时，$y>0$，∴ $4a+2b+c>0$，故③错误. ∵ 当 $x=-1$ 时，$y=a-b+c<0$，$b=-2a$，∴ $3a+c<0$，故④错误. 正确的结论有①②，共 2 个. 故选 B.

刷易错

9. 19 【解析】因为 $y=x^2-3x+1=\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2-\dfrac{5}{4}$，所以当 $x\geqslant\dfrac{3}{2}$时，y 随 x 的增大而增大. 又因为 $x\geqslant6$，所以当$x=6$ 时，y 取得最小值，为 $6^2-3\times6+1=19$.

▶**易错警示** 在讨论函数的最值时，一定要注意函数自变量的取值范围以及函数在这个取值范围内的增减性.

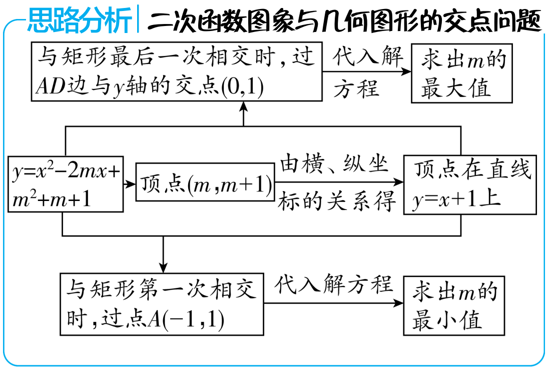
刷提升

1. B 【解析】由题知，$y=-x^2-4x+3=-(x+2)^2+7$，则将其图象向右平移 $k(k>0)$ 个单位后，所得的函数表达式为 $y_1=-(x-k+2)^2+7$，所以新抛物线的对称轴为直线 $x=k-2$. 因为当$-1<x<3$ 时，y_1 随 x 的增大而增大；当 $4<x<5$ 时，y_1 随 x 的增大而减小，所以$3\leqslant k-2\leqslant4$，解得 $5\leqslant k\leqslant6$，显然只有 B 选项符合题意. 故选 B.

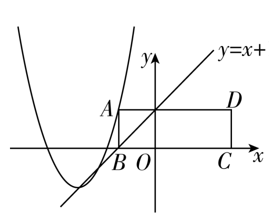
2. B 【解析】由图象可知，抛物线开口向下，交 y 轴于正半轴，对称轴在 y 轴的右侧，∴ $a<0$，$c>0$，$-\dfrac{b}{2a}>0$，∴ $b>0$，则 $abc<0$，故①正确. ∵ $-\dfrac{b}{2a}=1$，∴ $b=-2a$，∴ $2a+b=0$，故②正确. ③∵ $b=-2a$，当 $x=3$ 时，$y<0$，∴ 当 $x=-1$ 时，$y=a-b+c<0$，∴ $a+2a+c<0$，∴ $3a+c<0$，故③错误. 根据图象知，当 $x=1$ 时，y 有最大值，为 $a+b+c$，∴ 当 m 为实数时，有 $am^2+bm+c\leqslant a+b+c$，所以 $am^2+bm\leqslant a+b$（m 为实数），即 $a+b\geqslant m(am+b)$（m 为实数），故④正确. 函数图象与 x 轴的交点分别在 $2<x<3$ 和$-1<x<0$ 之间，∴ 当$-1<x<3$ 时，$y>0$ 不一定成立，故⑤错误. 正确的有①②④，故选 B.

3. B

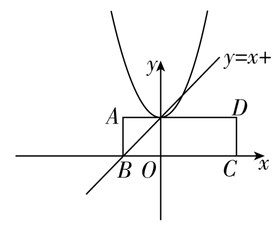
思路分析｜二次函数图象与几何图形的交点问题



【解析】将 $y=x^2-2mx+m^2+m+1$ 配成顶点式为 $y=(x-m)^2+m+1$，∴ 二次函数图象的顶点坐标是$(m,m+1)$. ∵ $a=1>0$，∴ 二次函数的图象开口向上，开口大小一定. ∵ 顶点坐标为$(m,m+1)$，∴ 此二次函数图象的顶点在直线 $y=x+1$ 上. 将抛物线沿直线 $y=x+1$ 从左至右移动，如图(1)，当二次函数的图象与矩形第一次相交时，二次函数的图象经过点 $A(-1,1)$，此时 m 取最小值. 将 $A(-1,1)$ 代入 $y=x^2-2mx+m^2+m+1$ 得 $1+2m+m^2+m+1=1$，解得 $m_1=\dfrac{-3-\sqrt{5}}{2}$，$m_2=\dfrac{-3+\sqrt{5}}{2}$（舍去），则 m 的最小值是$\dfrac{-3-\sqrt{5}}{2}$. 如图(2)，当二次函数的图象与矩形最后一次相交时，二次函数的图象的顶点在 AD 边与 y 轴的交点$(0,1)$处，此时 m 取最大值. 将$(0,1)$代入 $y=x^2-2mx+m^2+m+1$ 得 $m^2+m+1=1$，解得 $m_1=0$，$m_2=-1$（舍去），∴ $\dfrac{-3-\sqrt{5}}{2}\leqslant m\leqslant0$，故选 B.

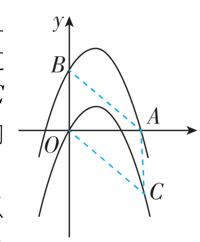


图(1)



图(2)

4. -1 【解析】如图，抛物线上 A，B 两点间的部分在平移过程中扫过的面积等于▱$ABOC$ 的面积. ∵ 平移过程中扫过的面积为 9，$S_{▱ABOC}=3OA$，∴ $3OA=9$，解得 $OA=3$，∴ 点 A 的坐标为$(3,0)$，代入 $y=ax^2+2x+3$，得 $a\times3^2+2\times3+3=0$，解得 $a=-1$. 故答案为-1.

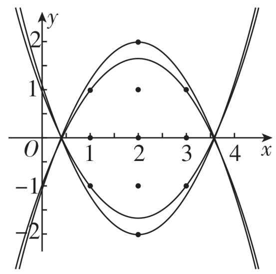


5. $\dfrac{7}{4}$ 【解析】∵ 二次函数表达式为 $y=x^2-2ax+b=(x-a)^2-a^2+b$（$a$，$b$ 是常数），∴ 顶点坐标为$(a,-a^2+b)$. 又∵ $A(2,0)$，$B(0,2)$，∴ 直线 AB 的函数表达式为 $y=-x+2$. ∵ 二次函数图象的顶点在线段 AB 上，∴ $-a^2+b=-a+2$，且 $0\leqslant a\leqslant2$，则 $b=a^2-a+2=\left(a-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{7}{4}$，∴ 当 $a=\dfrac{1}{2}$时，b 有最小值，为$\dfrac{7}{4}$. 故答案为$\dfrac{7}{4}$.

思路分析 先通过抛物线的表达式得到抛物线的开口向上，对称轴为直线 $x=2$，且过点$(0,1)$，再通过封闭区域内（包括边界）有 9 个整点，找到 a 的临界值，求出 a 的取值范围.◀

6. $\dfrac{2}{3}\leqslant a<\dfrac{3}{4}$ 【解析】若抛物线 $y=ax^2-4ax+1$（$a>0$）与其关于 x 轴对称的抛物线围成的封闭区域内（包括边界）共有 9 个整点，则 x 轴上有 3 个整点，且 x 轴上方、下方各有 3 个整点. ∵ $y=ax^2-4ax+1$（$a>0$），∴ 抛物线的开口向上，对称轴为直线 $x=2$，抛物线必过点$(0,1)$. 如图，若过点$(1,-1)$，则$-1=a-4a+1$，解得 $a=\dfrac{2}{3}$，此时刚好有 9 个整点；若过点$(2,-2)$，则$-2=4a-8a+1$，解得 $a=\dfrac{3}{4}$，此时有 11

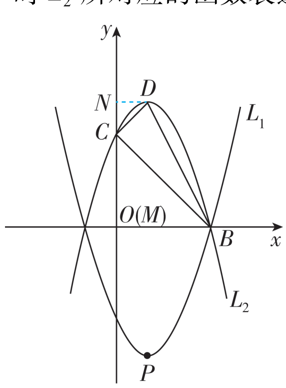
个整点,∴ $\frac{2}{3}\leqslant a<\frac{3}{4}$. 故答案为$\frac{2}{3}\leqslant a<\frac{3}{4}$.



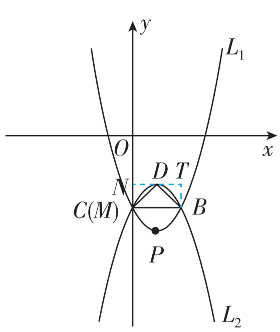
刷素养

7.【解】(1)∵ $y=x^2-2x-3=(x-1)^2-4$,∴ $P(1,-4)$. ∵ $m=1$,∴ 点 P 和点 D 关于直线 $y=1$ 对称,∴ 点 D 的坐标为$(1,6)$.

(2)∵ 点 $P(1,-4)$与点 D 关于直线 $y=m$ 对称,∴ $D(1,2m+4)$,∴ 抛物线 L_2:$y=-(x-1)^2+2m+4=-x^2+2x+2m+3$. 当 $x=0$ 时,$y=2m+3$,∴ $C(0,2m+3)$. ①当$\angle BCD=90°$时,如图(1),过 D 作 $DN\perp y$ 轴于 N. ∵ $D(1,2m+4)$,∴ $N(0,2m+4)$. ∵ $C(0,2m+3)$,∴ $NC=2m+4-(2m+3)=1$,∴ $DN=NC=1$,∴ $\angle DCN=45°$. ∵ $\angle BCD=90°$,∴ $\angle BCM=45°$. ∵ 直线 $l/\!/x$ 轴,∴ $\angle BMC=90°$,∴ $\angle CBM=\angle BCM=45°$,∴ $BM=CM$. ∵ $m\geqslant-3$,∴ $BM=CM=(2m+3)-m=m+3$,∴ $B(m+3,m)$. ∵ 点 B 在 $y=x^2-2x-3$ 的图象上,∴ $m=(m+3)^2-2(m+3)-3$,∴ $m=0$ 或 $m=-3$. ∵ 当 $m=-3$ 时,$m+3=0$,$2m+3=-3$,∴ $B(0,-3)$,$C(0,-3)$,此时,点 B 和点 C 重合,舍去;当 $m=0$ 时,$m+3=3$,$2m+3=3$,∴ $B(3,0)$,$C(0,3)$,符合题意. 将 $m=0$ 代入 $y=-x^2+2x+2m+3$ 得 $y=-x^2+2x+3$,∴ 此时 L_2 所对应的函数表达式为 $y=-x^2+2x+3$.



图(1)



图(2)

②当$\angle BDC=90°$时,如图(2),过 D 作 $DN\perp y$ 轴于 N,过 B 作 $BT\perp ND$ 交 ND 的延长线于 T. 同理,$BT=DT$,$D(1,2m+4)$,∴ $DT=BT=(2m+4)-m=m+4$. ∵ $DN=1$,∴ $NT=DN+DT=1+(m+4)=m+5$,∴ $B(m+5,m)$. ∵ 点 B 在 $y=x^2-2x-3$ 的图象上,∴ $m=(m+5)^2-2(m+5)-3$,解得 $m=-3$ 或 $m=-4$. ∵ $m\geqslant-3$,∴ $m=-3$,此时 $B(2,-3)$,$C(0,-3)$,符合题意. 将 $m=-3$ 代入 $y=-x^2+2x+2m+3$ 得 $y=-x^2+2x-3$,∴ 此时 L_2 所对应的函数表达式为 $y=-x^2+2x-3$. 易知$\angle DBC=90°$的情况不存在. 综上所述,L_2 所对应的函数表达式为 $y=-x^2+2x+3$ 或 $y=-x^2+2x-3$.

微专题

1. A 【解析】∵ 点$(2,a)$,$(-1,b)$,$(3,c)$都在抛物线 $y=x^2+x+2$ 上,∴ $a=2^2+2+2=8$,$b=(-1)^2-1+2=2$,$c=3^2+3+2=14$,∴ $c>a>b$. 故选 A.

2. D 【解析】∵ 二次函数 $y=-x^2+4x-c$ 图象的对称轴为直线 $x=2$,∴ 点 $P_3(3,y_3)$关于直线 $x=2$ 对称的点为$(1,y_3)$. ∵ $-1<0$,∴ 抛物线开口向下,∴ 当 $x<2$ 时,y 随 x 的增大而增大. ∵ $-3<1=1$,∴ $y_1<y_3=y_2$. 故选 D.

关键点拨 本题主要考查二次函数的图象和性质,熟练掌握二次函数的增减性、图象的对称性是解题关键.

3. B 【解析】∵ $y=ax^2-2ax-3a(a\neq0)$,∴ 图象对称轴为直线 $x=-\frac{-2a}{2a}=1$. ∵ $-1<x_1<0$,$1<x_2<2$,$x_3>3$,∴ $|x_3-1|>|x_1-1|>|x_2-1|$,∴ 点(x_3,y_3)离对称轴最远,点(x_2,y_2)离对称轴最近. 当 $a>0$ 时,抛物线开口向上,∴ $y_3>y_1>y_2$;当 $a<0$ 时,抛物线开口向下,∴ $y_3<y_1<y_2$. 综上,y_2 和 y_3 均可能最大,也可能最小,y_1 不可能最大,也不可能最小. 故选 B.

4.【解】(1)∵ 对于 $x_1=3$,$x_2=4$,有 $y_1=y_2$,∴ 抛物线的对称轴为直线 $x=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{7}{2}$. ∵ 抛物线的对称轴为直线 $x=t$,∴ $t=\frac{7}{2}$.

(2)∵ $2<x_1<3$,$3<x_2<4$,∴ $\frac{5}{2}<\frac{x_1+x_2}{2}<\frac{7}{2}$,$x_1<x_2$. 又∵ $y_1<y_2$,$a>0$,∴ 点(x_1,y_1)离对称轴更近,则点(x_1,y_1)与(x_2,y_2)连线的中点在对称轴的右侧,∴ $\frac{x_1+x_2}{2}>t$,即 $t\leqslant\frac{5}{2}$.

微专题

1.【解】$y=x^2+2x-3=(x+1)^2-4$,抛物线对称轴为直线 $x=-1$. 当 $x>-1$ 时,y 随 x 的增大而增大,当 $x<-1$ 时,y 随 x 的增大而减小.

(1)在全体实数范围内,当 $x=-1$ 时,函数有最小值-4,没有最大值.

(2)在$-4\leqslant x\leqslant-2$ 的范围内,当 $x=-2$ 时,函数有最小值-3;当 $x=-4$ 时,函数有最大值 5.

(3)在$-3\leqslant x\leqslant0$ 的范围内,当 $x=-1$ 时,函数有最小值-4;当 $x=-3$ 时,函数有最大值 0.

(4)在 $1\leqslant x\leqslant3$ 的范围内,当 $x=1$ 时,函数有最小值 0;当 $x=3$ 时,函数有最大值 12.

2. (1)1 或$\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ (2)$-2\leqslant m\leqslant-1$

关键点拨 (1)依据题意,可得抛物线的对称轴为直线 $x=1$,进而结合二次函数的性质分 $\frac{m}{2}>1$,$\frac{m}{2}\leqslant1\leqslant m+1$ 和 $m+1<1$ 三种情形进行讨论即可得解.

【解析】(1)$y=x^2-2x+m-1$ 图象的对称轴为直线 $x=1$,抛物线开口向上,∴ 当 $x>1$ 时,y 随 x 的增大而增大;当 $x<1$ 时,y 随 x 的增大而减

小. ①当 $\frac{m}{2}>1$，即 $m>2$ 时，则当 $x=\frac{m}{2}$ 时，$y=-1$，∴ $\left(\frac{m}{2}\right)^2-2\cdot\frac{m}{2}+m-1=-1$，解得 $m=0$，不符合题意，舍去. ②当 $\frac{m}{2}\leqslant1\leqslant m+1$，即 $0\leqslant m\leqslant2$ 时，则当 $x=1$ 时，$y=-1$，
∴ $1-2+m-1=-1$，解得 $m=1$. ③当 $m+1<1$，即 $m<0$ 时，则当 $x=m+1$ 时，$y=-1$，∴ $(m+1)^2-2(m+1)+m-1=-1$，∴ $m^2+m-1=0$，解得 $m_1=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$，$m_2=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$（舍去）. 综上所述，$m=1$ 或 $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$. 故答案为 1 或 $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$.

(2) 二次函数 $y=ax^2+2ax+1=a(x+1)^2-a+1$ $(a>0)$，∴ 该函数图象开口向上，对称轴是直线 $x=-1$，当 $x=-1$ 时，该函数取得最小值 $-a+1$. ∵ 当 $m\leqslant x\leqslant0$ 时，y 有最小值 $1-a$ 和最大值 1，且当 $x=0$ 时，$y=1$，根据对称性，当 $x=-2$ 时，$y=1$，∴ $-2\leqslant m\leqslant-1$，故答案为 $-2\leqslant m\leqslant-1$.

3. $\underline{-1\text{ 或 }-2}$ 【解析】$y=x^2+2ax=(x+a)^2-a^2$，∴ 函数图象对称轴为直线 $x=-a$，抛物线开口向上.
①若 $-a<0$，即 $a>0$ 时，当 $x=0$ 时，$m=0$，当 $x=3$ 时，$M=9+6a$. ∵ $M-m=4$，∴ $9+6a-0=4$，解得 $a=-\frac{5}{6}$（舍去）. ②若 $0\leqslant-a\leqslant1.5$，即 $-1.5\leqslant a\leqslant0$，则当 $x=-a$ 时，$m=-a^2$，当 $x=3$ 时，$M=9+6a$. ∵ $M-m=4$，∴ $9+6a+a^2=4$，解得 $a=-1$ 或 $a=-5$（舍去）. ③若 $1.5<-a\leqslant3$，即 $-3\leqslant a<-1.5$，则当 $x=-a$ 时，$m=-a^2$，当 $x=0$ 时，$M=0$. ∵ $M-m=4$，∴ $0-(-a^2)=4$，解得 $a=-2$ 或 $a=2$（舍去）. ④若 $-a>3$，即 $a<-3$，则当 $x=3$ 时，$m=9+6a$，当 $x=0$ 时，$M=0$. ∵ $M-m=4$，∴ $0-(9+6a)=4$，解得 $a=-\frac{13}{6}$（舍去）. 综上可知，a 的值是 -1 或 -2，故答案为 -1 或 -2.

4.【解】$y=x^2+2mx+4m^2=(x+m)^2+3m^2$，∴ 函数图象的对称轴是直线 $x=-m$，抛物线开口向上.
①当 $2m>-m$，即 $m>0$ 时，当 $x=2m$ 时，$y=9$，∴ $4m^2+4m^2+4m^2=9$，∴ $m=\frac{\sqrt{3}}{2}$（负值已舍去），此时的二次函数表达式为 $y=x^2+\sqrt{3}x+3$.
②当 $2m\leqslant-m\leqslant2m+3$，即 $-1\leqslant m\leqslant0$ 时，当 $x=-m$ 时，$y=9$，∴ $3m^2=9$，解得 $m=\pm\sqrt{3}$（都不符合题意，舍去）.
③当 $2m+3<-m$，即 $m<-1$ 时，当 $x=2m+3$ 时，$y=9$，∴ $(2m+3)^2+2m(2m+3)+4m^2=9$，解得 $m=0$（舍去）或 -1.5，此时的二次函数表达式为 $y=x^2-3x+9$. 综上，二次函数表达式为 $y=x^2+\sqrt{3}x+3$ 或 $y=x^2-3x+9$.

关键点拨
分三种情况：①当 $2m>-m$，即 $m>0$ 时，②当 $2m\leqslant-m\leqslant2m+3$，即 $-1\leqslant m\leqslant0$ 时，③当 $2m+3<-m$，即 $m<-1$ 时，根据二次函数的最值列方程可求得 m 的值，从而得出结论.

3 确定二次函数的表达式

刷基础

1. $\underline{y=-x^2-3x+4}$ 【解析】设二次函数的表达式为 $y=ax^2+bx+c$，则有 $\begin{cases}a+b+c=0,\\4a+2b+c=-6,\\a-b+c=6,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=-1,\\b=-3,\\c=4.\end{cases}$ 即抛物线的表达式为 $y=-x^2-3x+4$.

2.【解】(1) 把 $(0,1)$，$(1,-2)$，$(2,1)$ 代入 $y=ax^2+bx+c$，得 $\begin{cases}c=1,\\a+b+c=-2,\\4a+2b+c=1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=3,\\b=-6,\\c=1,\end{cases}$ 所以抛物线的表达式为 $y=3x^2-6x+1$.
(2) $y=3x^2-6x+1=3(x^2-2x)+1=3(x^2-2x+1-1)+1=3(x-1)^2-2$，所以抛物线的顶点坐标为 $(1,-2)$.

3. $\underline{y=-3(x-1)^2-2}$ 【解析】设二次函数的表达式为 $y=a(x-1)^2-2\ (a\neq0)$. ∵ 其图象经过点 $(0,-5)$，∴ $-5=a(0-1)^2-2$，解得 $a=-3$，∴ 二次函数的表达式是 $y=-3(x-1)^2-2$.

4. $\underline{y=2(x+1)^2+4\text{（答案不唯一）}}$ 【解析】∵ 抛物线满足：①开口向上，即 $a>0$，②顶点为 $(-1,4)$，即 $y=a(x+1)^2+4$，∴ 满足题意的二次函数的表达式为 $y=2(x+1)^2+4$（答案不唯一）.

5. $\underline{y=-\frac{1}{12}x^2+8}$ 【解析】由题意可得，点 C 的坐标为 $(0,8)$，点 B 的坐标为 $(-6,5)$，设此抛物线的表达式为 $y=ax^2+8$，将 $B(-6,5)$ 代入，得 $5=a\times(-6)^2+8$，解得 $a=-\frac{1}{12}$，∴ 此抛物线的表达式为 $y=-\frac{1}{12}x^2+8$，故答案为 $y=-\frac{1}{12}x^2+8$.

6.【解】(1) 由题意可知，图象顶点为 $(2,-2)$，设 $y=a(x-2)^2-2$，把 $(0,-6)$ 代入，得 $-6=a(0-2)^2-2$，解得 $a=-1$，∴ 该二次函数的表达式为 $y=-(x-2)^2-2$.
(2) 不在. 理由如下：把 $x=-1$ 代入抛物线表达式，得 $y=-(-1-2)^2-2=-11\neq2$，∴ 点 $P(-1,2)$ 不在该抛物线上.

7. $\underline{y=-2x^2+4x+6}$ 【解析】∵ 抛物线经过 $(-1,0)$ 和 $(3,0)$，∴ 设抛物线的表达式为 $y=a(x+1)(x-3)$. ∵ 该抛物线的形状、开口方向均与抛物线 $y=-2x^2+9x$ 相同，∴ $a=-2$，∴ $y=-2(x+1)(x-3)=-2x^2+4x+6$. 故答案为 $y=-2x^2+4x+6$.

关键点拨
根据题目给定的交点坐标，用“交点式”表示二次函数的表达式是解题关键.

8. $\underline{y=-x^2+2x+3}$ 【解析】∵ 二次函数的图象与 x 轴交点坐标为 $(-1,0)$，对称轴为直线 $x=1$，∴ 与 x 轴另一个交点坐标为 $(3,0)$，设二次函数的表达式为 $y=a(x+1)(x-3)$，把 $(0,3)$ 代入得，$3=-3a$，解得 $a=-1$，∴ $y=-(x+1)(x-3)=-x^2+2x+3$，∴ 其表达式为 $y=-x^2+2x+3$，故答案为 $y=-x^2+2x+3$.

9.【解】(1)$\because$ 二次函数的图象经过点 $A(-1,0)$,$B(3,0)$,$\therefore$ 设二次函数表达式为 $y=a(x+1)(x-3)$. 将 $C(1,-4)$ 代入,得 $a\times2\times(-2)=-4$,解得 $a=1$,$\therefore$ 二次函数表达式为 $y=(x+1)(x-3)$,即 $y=x^2-2x-3$,$\therefore -\frac{b}{2a}=-\frac{-2}{2\times1}=1$,$\frac{4ac-b^2}{4a}=\frac{4\times1\times(-3)-(-2)^2}{4\times1}=-4$,$\therefore$ 点 $P(1,-4)$.

(2)

思路分析

条件	结论
$y_1=y_2$	M,N 两点关于直线 $x=1$ 对称,直线 $MN/\!/x$ 轴
$m-n=5$	M,N 两点距对称轴的距离均为 $\frac{5}{2}$,M,N 的横坐标分别为 $\frac{7}{2},-\frac{3}{2}$

结合(1)得当 $y_1=y_2$ 时,点 M,N 关于直线 $x=1$ 对称,且 $MN/\!/x$ 轴.

由 $MN=m-n=5$,得 M 的横坐标为 $1+\frac{5}{2}=\frac{7}{2}$,

$\therefore M$ 的纵坐标为 $y_1=\left(\frac{7}{2}\right)^2-2\times\frac{7}{2}-3=\frac{9}{4}$,

$\therefore P$ 到直线 MN 的距离为 $\frac{9}{4}-(-4)=\frac{25}{4}$.

刷提升

1. C　【解析】由表格数据可知,$x=0$ 和 $x=2$ 时,y 的值相同,都是 -1,$\therefore$ 抛物线的对称轴为直线 $x=\frac{0+2}{2}=1$. $\because$ 直线 $x=-1$ 与直线 $x=3$ 关于对称轴 $x=1$ 对称,$\therefore x=-1$ 与 $x=3$ 所对应的 y 值是相等的,$\therefore y=-5$ 是错误的或 $y=5$ 是错误的,$\therefore$ 抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 经过 $(0,-1)$,$(1,-3)$,$(2,-1)$,$\therefore \begin{cases}c=-1,\\a+b+c=-3,\\4a+2b+c=-1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=2,\\b=-4,\\c=-1,\end{cases}$ $\therefore$ 二次函数表达式为 $y=2x^2-4x-1$. 当 $x=-1$ 时,$y=2+4-1=5$,当 $x=3$ 时,$y=18-12-1=5$,故选 C.

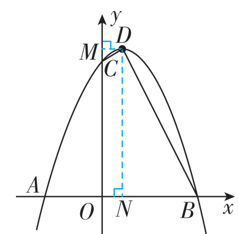
2. $y=-x^2+x+2$ 或 $y=x^2-x-2$　【解析】设抛物线的表达式为 $y=a(x-2)(x+1)$. $\because OC=2$,$\therefore C$ 点坐标为 $(0,2)$ 或 $(0,-2)$. 把 $C(0,2)$ 代入 $y=a(x-2)(x+1)$,得 $-2a=2$,解得 $a=-1$,此时抛物线的表达式为 $y=-(x-2)(x+1)$,即 $y=-x^2+x+2$;把 $C(0,-2)$ 代入 $y=a(x-2)(x+1)$,得 $-2a=-2$,解得 $a=1$,此时抛物线的表达式为 $y=(x-2)(x+1)$,即 $y=x^2-x-2$. 综上,抛物线的表达式为 $y=-x^2+x+2$ 或 $y=x^2-x-2$.

关键点拨
已知抛物线与 x 轴的交点坐标,则可设交点式 $y=a(x-2)(x+1)$,再由 $OC=2$ 得到 C 点坐标为 $(0,2)$ 或 $(0,-2)$,然后把 $(0,2)$ 和 $(0,-2)$ 分别代入 $y=a(x-2)(x+1)$ 可求出对应的 a 的值,从而可得抛物线表达式.

3. -5　【解析】由题意可知,当图象顶点 P 在点 $B(1,-3)$ 处时,点 N 的横坐标的最大值为 4,$\therefore$ 可设此时抛物线的表达式为 $y=a(x-1)^2-3$. 把点 N 的坐标代入得 $0=a(4-1)^2-3$,解得 $a=\frac{1}{3}$. 当图象顶点 P 在点 $A(-2,-3)$ 处时,点 M 的横坐标最小,此时抛物线的表达式为 $y=\frac{1}{3}(x+2)^2-3$,令 $y=0$,则 $\frac{1}{3}(x+2)^2-3=0$,解得 $x=-5$ 或 1,$\therefore$ 点 M 的横坐标的最小值为 -5. 故答案为 -5.

关键点拨
解题关键是由题意得到当图象顶点 P 在点 B 处时,点 N 的横坐标最大;当图象顶点 P 在点 A 处时,点 M 的横坐标最小.

4. $-\frac{1}{2}$　【解析】过点 D 作 $DM\perp y$ 轴于点 M,作 $DN\perp x$ 轴于点 N,如图.



$\because$ 抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 过 $A(-3,0)$,$B(5,0)$ 两点,

$\therefore \begin{cases}9a-3b+c=0,\\25a+5b+c=0,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}b=-2a,\\c=-15a,\end{cases}$

$\therefore y=ax^2-2ax-15a=a(x-1)^2-16a$,$\therefore C(0,-15a)$,$D(1,-16a)$. $\because \angle DCO+\angle DBO=180°$,$\angle DCO+\angle DCM=180°$,$\therefore \angle DCM=\angle DBO$. $\because DM\perp y$ 轴,$DN\perp x$ 轴,$\therefore \angle DMC=\angle DNB=90°$,$\therefore \triangle DMC\backsim\triangle DNB$,$\therefore \frac{DM}{DN}=\frac{MC}{NB}$,$\therefore \frac{1}{-16a}=\frac{-16a-(-15a)}{5-1}$,解得 $a=\pm\frac{1}{2}$. $\because$ 抛物线开口向下,$\therefore a=-\frac{1}{2}$. 故答案为 $-\frac{1}{2}$.

5.【解】(1)$\because$ 抛物线 $y_1=2x^2+bx+c$ 过点 $A(1,0)$,$B(2,0)$,$\therefore y_1=2(x-1)(x-2)$,即函数表达式为 $y_1=2x^2-6x+4$,

$\therefore$ 该抛物线的对称轴为直线 $x=\frac{3}{2}$.

(2)把 $y_1=2(x-h)^2-2$ 化成一般式,得 $y_1=2x^2-4hx+2h^2-2$,$\therefore b=-4h$,$c=2h^2-2$,$\therefore b+c=2h^2-4h-2=2(h-1)^2-4$. 把 $b+c$ 的值看做是关于 h 的二次函数,则该二次函数图象开口向上,函数有最小值,$\therefore$ 当 $h=1$ 时,$b+c$ 的最小值是 -4.

(3)由题意得 $y=y_1-y_2=2(x-m)(x-m-2)-(x-m)=(x-m)[2(x-m)-5]$. $\because$ 函数 y 的图象经过点 $(x_0,0)$,$\therefore (x_0-m)[2(x_0-m)-5]=0$,$\therefore x_0-m=0$ 或 $2(x_0-m)-5=0$,故 $x_0-m=0$ 或 $x_0-m=\frac{5}{2}$.

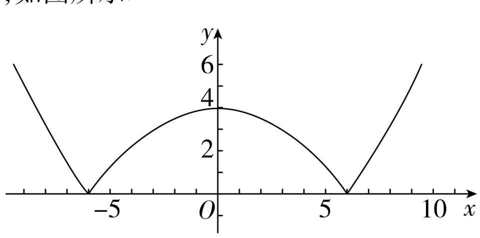
6.【解】(1)由题意,得正方形 $ABCD$ 四个顶点的坐标分别为 $A(4,4)$,$B(4,-4)$,$C(-4,-4)$,

$D(-4,4)$，∴ 反比例函数 $y=\frac{1}{2x}(x>0)$ 的图象上一个“4 阶方点”可以是 $\left(1,\frac{1}{2}\right)$. 故答案为 $\left(1,\frac{1}{2}\right)$（答案不唯一）.

(2) ∵ $y=kx-3k+1=(x-3)k+1$，当 $x=3$ 时，$y=1$，∴ 直线 $y=kx-3k+1$ 恒过点 $(3,1)$. ∵ 直线 $y=kx-3k+1$ 上有且只有一个“2 阶方点”，∴ 直线 $y=kx-3k+1$ 过点 $A(2,2)$ 或过点 $B(2,-2)$. 当过 $A(2,2)$ 时，$2=2k-3k+1$，则 $k=-1$；当过 $B(2,-2)$ 时，$-2=2k-3k+1$，则 $k=3$. 综上，k 的值为 -1 或 3.

(3) ∵ 抛物线 $y=ax^2-(6+t)ax+6ta$ 上有且只有 2 个“3 阶方点”，∴ 若 $a>0$，则抛物线过 B，C 两点，对称轴为 y 轴，若 $a<0$，则抛物线过 A，D 两点，对称轴为 y 轴，∴ $-\frac{-(6+t)a}{2a}=0$，∴ $6+t=0$，∴ $t=-6$，∴ $y=ax^2-36a$. 当 $a>0$ 时，将 $B(3,-3)$ 代入，得 $-3=9a-36a$，解得 $a=\frac{1}{9}$，∴ $y=\frac{1}{9}x^2-4$；当 $a<0$ 时，将 $A(3,3)$ 代入，得 $3=9a-36a$，解得 $a=-\frac{1}{9}$，∴ $y=-\frac{1}{9}x^2+4$. 综上，抛物线的表达式为 $y=\frac{1}{9}x^2-4$ 或 $y=-\frac{1}{9}x^2+4$.

(4) 令 $y=-\frac{1}{9}x^2+4=0$，解得 $x_1=6$，$x_2=-6$. 令 $\frac{1}{9}x^2-4=0$，解得 $x_1=6$，$x_2=-6$，∴ 图象 W 与 x 轴的交点为 $(6,0)$，$(-6,0)$. 当 $x=0$ 时，$y=-\frac{1}{9}x^2+4=4$，∴ 图象 W 与 y 轴的交点为 $(0,4)$，如图所示.



将 $x=9$ 代入 $y=\frac{1}{9}x^2-4$ 中，得 $y=\frac{1}{9}\times 9^2-4=5$，∴ $P(9,5)$.

当 $m\geqslant 9$ 时，图象最高点为 Q，最低点为 P，∴ $\frac{1}{9}m^2-4-5=\frac{1}{18}m^2$，解得 $m_1=9\sqrt{2}$，$m_2=-9\sqrt{2}$（舍）；当 $6\leqslant m<9$ 时，最高点为 P，最低点为 Q，∴ $5-\left(\frac{1}{9}m^2-4\right)=\frac{1}{18}m^2$，解得 $m_1=3\sqrt{6}$，$m_2=-3\sqrt{6}$（舍）；当 $-9\leqslant m<6$ 时，最高点为 P，最低点为图象与 x 轴交点，∴ $5-0=\frac{1}{18}m^2$，解得 $m_1=3\sqrt{10}$，$m_2=-3\sqrt{10}$，都不符合；当 $m<-9$ 时，最高点为 Q，最低点为图象与 x 轴交点，∴ $\frac{1}{9}m^2-4-0=\frac{1}{18}m^2$，解得 $m_1=6\sqrt{2}$，$m_2=-6\sqrt{2}$，都不符合. 综上所述，m 的值为 $9\sqrt{2}$ 或 $3\sqrt{6}$.

思路分析

(2) 找到直线 $y=kx-3k+1$ 恒过的定点，根据“n 阶方点”的定义找到符合题意的点，建立方程即可求解；
(3) 分 $a>0$，$a<0$ 两种情况分别求解；
(4) 先画出图象 W，再分类讨论，得出符合题意的 m 的值.

关键点拨

(2) ② 当 P，B，A 共线时，$PA-PB$ 的值最大.

大招专题 3　二次函数中的最值问题

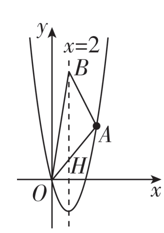
刷难关

大招解读 | 几何定理法求线段之和（差）最值

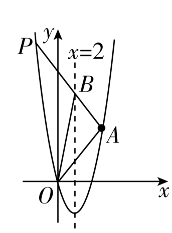
(1) 线段之差最大问题：当两定点和动点共线时，线段之差最大，所以动点在两定点所在的直线上，求解时可过两定点作直线.
(2) 线段之和（周长）最小问题：这类问题一般是将军饮马中“两定点，定线上一动点”，求解时作对称点，将求和的两条线段转化到一条线段上.

1.【解】 (1) ∵ 抛物线过点 $O(0,0)$，$A(5,5)$，且它的对称轴为直线 $x=2$，∴ 抛物线与 x 轴的另一个交点的坐标为 $(4,0)$. 设抛物线表达式为 $y=ax(x-4)$. 把 $A(5,5)$ 代入，得 $5a=5$，解得 $a=1$，∴ 此抛物线的表达式为 $y=x^2-4x$.

(2) ①如图(1)，点 B 是抛物线对称轴上的一点，且点 B 在第一象限，∴ 设 $B(2,m)(m>0)$，直线 OA 的表达式为 $y=kx$，则 $5k=5$，解得 $k=1$，∴ 直线 OA 的表达式为 $y=x$. 设直线 OA 与抛物线对称轴交于点 H，则 $H(2,2)$，∴ $BH=|m-2|$. ∵ $S_{\triangle OAB}=15$，∴ $\frac{1}{2}\times|m-2|\times 5=15$，解得 $m=8$ 或 $m=-4$（舍去），∴ 点 B 的坐标为 $(2,8)$.



图(1)



图(2)

②设直线 AB 的表达式为 $y=cx+d$. 把 $A(5,5)$，$B(2,8)$ 代入得 $\begin{cases}5c+d=5,\\2c+d=8,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}c=-1,\\d=10,\end{cases}$

∴ 直线 AB 的表达式为 $y=-x+10$.

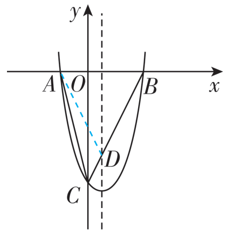
如图(2)，当 $PA-PB$ 的值最大时，点 A，B，P 在同一条直线上.

∵ P 是抛物线上的动点，∴ 联立得 $\begin{cases}y=-x+10,\\y=x^2-4x,\end{cases}$

解得$\begin{cases}x_1=-2,\\y_1=12,\end{cases}\begin{cases}x_2=5,\\y_2=5\end{cases}$（舍去），∴ $P(-2,12)$.

2.【解】(1)∵ $OA=2$，$OC=8$，∴ $A(-2,0)$，$C(0,-8)$. 将 $A(-2,0)$，$C(0,-8)$代入 $y=x^2+bx+c$，得$\begin{cases}4-2b+c=0,\\c=-8,\end{cases}$解得$\begin{cases}b=-2,\\c=-8,\end{cases}$∴ 抛物线的表达式为 $y=x^2-2x-8$.

(2)由 $y=x^2-2x-8$ 可知，抛物线对称轴为直线 $x=1$. 由抛物线的对称性可知，点 A 与点 B 关于对称轴对称. 如图，设 BC 交对称轴于点 D，连接 AD，



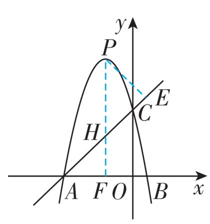
则 $AD=BD$. 由两点之间线段最短可知，此时 $AD+CD$ 最小，而 AC 的长度是定值，故此时 $\triangle ACD$ 的周长取得最小值. 由 $y=x^2-2x-8$ 可知，点 B 的坐标为$(4,0)$. 设直线 BC 的表达式为 $y=kx-8$，将点 $B(4,0)$代入，得 $k=2$，∴ 直线 BC 的表达式为 $y=2x-8$，当 $x=1$ 时，$y=-6$，∴ 点 D 的坐标为$(1,-6)$.

大招解读｜代数法求线段最值

解决二次函数图象中求平行于坐标轴的线段最值问题时，常用代数法：设出动点坐标，利用坐标表示出线段长度，构造二次函数，利用二次函数的性质求最值.

3.【解】(1)∵ 点 $C(0,5)$在抛物线 $y=-x^2-4x+c$ 上，∴ $c=5$，∴ $y=-x^2-4x+5$，令 $y=0$，得 $0=-x^2-4x+5$，解得 $x=1$ 或 -5，∴ 点 A 的坐标为$(-5,0)$.

(2)由(1)知，$B(1,0)$. 过 P 作 $PE\perp AC$ 于点 E，作 $PF\perp x$ 轴于点 F，交 AC 于点 H，如图. ∵ $A(-5,0)$，$C(0,5)$，∴ $OA=OC$，∴ $\triangle AOC$ 是等腰直角三角形，∴ $\angle CAO=45°$. ∵ $PF\perp x$ 轴，∴ $\angle AHF=45°=\angle PHE$，∴ $\triangle PHE$ 是等腰直角三角形，



∴ $PE=\dfrac{PH}{\sqrt{2}}$，∴ 当 PH 取最大值时，PE 取最大值. 设直线 AC 的表达式为 $y=kx+5$，将 $A(-5,0)$代入得 $0=-5k+5$，∴ $k=1$，∴ 直线 AC 的表达式为 $y=x+5$. 设 $P(m,-m^2-4m+5)(-5<m<0)$，则 $H(m,m+5)$，∴ $PH=(-m^2-4m+5)-(m+5)=-\left(m+\dfrac{5}{2}\right)^2+\dfrac{25}{4}$. ∵ $-1<0$，∴ 当 $m=-\dfrac{5}{2}$时，PH 取得最大值，为$\dfrac{25}{4}$，∴ $PE=\dfrac{25}{4\sqrt{2}}=\dfrac{25\sqrt{2}}{8}$，∴ 点 P 到直线 AC 距离的最大值为$\dfrac{25\sqrt{2}}{8}$.

思路分析

(2)设 BC 交对称轴于点 D，由抛物线的对称性可知 $AD=BD$，由两点之间线段最短可知，此时 $AD+CD$ 有最小值，而 AC 的长度是定值，故此时 $\triangle ACD$ 的周长取得最小值，求出直线 BC 的表达式，即可得到答案.

结论证明

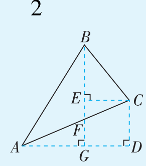
证明：如图，$S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ABF}+S_{\triangle BCF}$

$=\dfrac{1}{2}BF\cdot AG+\dfrac{1}{2}BF\cdot EC$

$=\dfrac{1}{2}BF\cdot(AG+EC)$

$=\dfrac{1}{2}BF\cdot(AG+GD)$

$=\dfrac{1}{2}BF\cdot AD$.



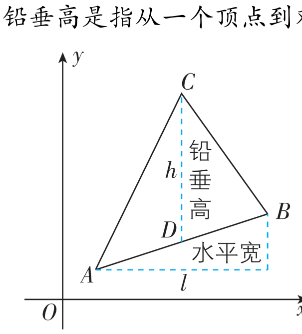
4.【解】(1)∵ 抛物线 $y=-x^2+bx+c$(b,c 为常数)与 x 轴交于 $A(-1,0)$，$B(3,0)$，∴ 把 $A(-1,0)$，$B(3,0)$代入，得$\begin{cases}0=-9+3b+c,\\0=-1-b+c,\end{cases}$解得$\begin{cases}b=2,\\c=3,\end{cases}$∴ 抛物线的表达式为 $y=-x^2+2x+3$.

(2)∵ $y=-x^2+2x+3=-(x-1)^2+4$，∴ 抛物线对称轴为直线 $x=1$，顶点 E 的坐标为$(1,4)$. 当 $x=-2$ 时，$y=-(-2)^2+2\times(-2)+3=-5$，∴ $C(-2,-5)$. 设直线 OC 的表达式为 $y=nx$. 将 $C(-2,-5)$代入，得 $-5=-2n$，解得 $n=\dfrac{5}{2}$，∴ 直线 OC 的表达式为 $y=\dfrac{5}{2}x$，令 $x=1$，则 $y=\dfrac{5}{2}$，∴ $D\left(1,\dfrac{5}{2}\right)$. ∵ $E(1,4)$，∴ $DE=4-\dfrac{5}{2}=\dfrac{3}{2}$，∴ $\triangle CDE$ 的面积为$\dfrac{1}{2}\times DE\times[1-(-2)]=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{3}{2}\times3=\dfrac{9}{4}$.

(3)设 $P(m,-m^2+2m+3)$. ∵ $D\left(1,\dfrac{5}{2}\right)$，∴ $PD^2=(m-1)^2+\left(-m^2+2m+3-\dfrac{5}{2}\right)^2=(m^2-2m)^2+\dfrac{5}{4}\geqslant\dfrac{5}{4}$，∴ PD^2 的最小值为$\dfrac{5}{4}$，∴ PD 长的最小值为$\sqrt{\dfrac{5}{4}}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

大招解读｜铅垂法巧求面积最值

铅垂法是一种求三角形面积的特殊方法，主要解决的是斜三角形面积问题. 具体公式为三角形面积等于水平宽和铅垂高乘积的一半. 三角形的水平宽指的是两个顶点之间的水平距离，而铅垂高是指从一个顶点到对边的铅垂高度.

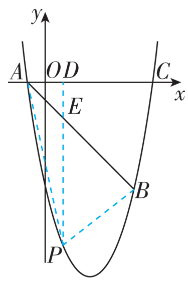


$S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}l\cdot h$

5.【解】(1)设 $y=a(x+1)(x-6)(a\neq0)$. 把 $B(5,-6)$代入，得 $a(5+1)(5-6)=-6$，解得 $a=1$，∴ $y=(x+1)(x-6)=x^2-5x-6$.

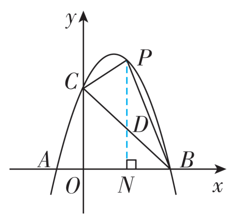
(2)如图，连接 AP，BP，过点 P 作 $PD\perp x$ 轴于点 D，交 AB 于点 E. 由 $A(-1,0)$，$B(5,-6)$，易得直线 AB 的表达式为 $y=-x-1$. 设 $P(m,m^2-$

$5m-6)(-1<m<5)$,则 $E(m,-m-1)$,$\therefore PE=(-m-1)-(m^2-5m-6)=-m^2+4m+5$,$\therefore S_{\triangle ABP}=\frac{1}{2}PE\cdot(x_B-x_A)=\frac{1}{2}(-m^2+4m+5)\times6=-3(m-2)^2+27$,$\therefore$ 当 $m=2$ 时,$S_{\triangle ABP}$ 最大,此时 $P(2,-12)$.



6.【解】(1)$A(-1,0)$,$B(3,0)$,$C(0,3)$. 当 $x=0$ 时,$y=3$,$\therefore C(0,3)$. 当 $y=0$ 时,$-x^2+2x+3=0$,解得 $x_1=3$,$x_2=-1$,$\therefore A(-1,0)$,$B(3,0)$.

(2)如图,过点 P 作 $PN\perp x$ 轴于点 N,交 BC 于点 D,则 $S_{\triangle BCP}=\frac{1}{2}PD\cdot OB$. $\because B(3,0)$,$\therefore OB=3$,$\therefore S_{\triangle BCP}=\frac{1}{2}PD\cdot OB=\frac{3}{2}PD$. 设直线 BC 的表达式为 $y=kx+b$,把 $B(3,0)$,$C(0,3)$代入,得 $\begin{cases}0=3k+b,\\3=b,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=-1,\\b=3,\end{cases}$ $\therefore$ 直线 BC 的表达式为 $y=-x+3$. 设 $P(m,-m^2+2m+3)(0<m<3)$,则 $D(m,-m+3)$,$\therefore PD=-m^2+2m+3-(-m+3)=-m^2+3m=-\left(m-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{9}{4}$,$\therefore$ 当 $m=\frac{3}{2}$ 时,PD 取最大值,即$\triangle BCP$ 的面积最大,$\therefore P\left(\frac{3}{2},\frac{15}{4}\right)$.



关键点拨

(2)先求出直线 BC 的表达式,易知 PD 取最大值时,$\triangle BCP$ 面积最大,利用坐标将 PD 的长表示出来,根据二次函数的性质就可以求出点 P 的坐标.

4 二次函数的应用

课时 1 图形面积问题及抛物线形问题

刷基础

1. A 【解析】设 $AB=x$ m,矩形框架 $ABCD$ 的面积为 S m^2,则 $AD=\frac{12-3x}{3}=(4-x)$ m,$\therefore S=AB\cdot AD=x(4-x)=-x^2+4x=-(x-2)^2+4$,$\therefore$ 当 $x=2$ 时,S 取得最大值,为 4,$\therefore$ 矩形框架 $ABCD$ 的最大面积为 4 m^2. 故选 A.

2. B 【解析】设运动时间为 x s,四边形 $APQC$ 的面积为 y cm^2,则 $AP=x$ cm,$BQ=2x$ cm,$\therefore BP=(4-x)$ cm,$\therefore y=S_{\triangle ABC}-S_{\triangle PBQ}=\frac{1}{2}BC\cdot AB-\frac{1}{2}BQ\cdot BP$,即 $y=\frac{1}{2}\times8\times4-\frac{1}{2}\times2x(4-x)=x^2-4x+16=(x-2)^2+12$,$\therefore$ 当 $x=2$ 时,y 有最小值,为 12,$\therefore$ 当四边形 $APQC$ 的面积最小时,运动的时间为 2 s. 故选 B.

3.【解】(1)由花圃的宽 AB 为 x 米,可得 $BC=(24-3x)$ 米. 根据题意,得 $y=x(24-3x)=-3x^2+24x$. 由题意,得 $\begin{cases}x>0,\\24-3x>0,\end{cases}$ 解得 $0<x<8$.

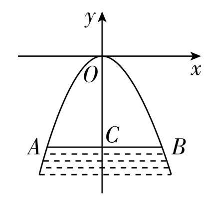
答:y 与 x 之间的函数关系式为 $y=-3x^2+24x$ $(0<x<8)$.

(2)$y=-3x^2+24x=-3(x-4)^2+48$.

$\because$ 墙的最大可用长度为 9 米,$\therefore 0<24-3x\leqslant9$,$\therefore 5\leqslant x<8$,$\therefore$ 当 $x=5$ 时,$y_{最大值}=45$.

答:当 AB 为 5 米时,矩形花圃的面积最大,最大面积是 45 平方米.

4. C 【解析】如图,由题意得 $C\left(0,-\frac{25}{3}\right)$. 令 $-\frac{25}{3}=-\frac{1}{3}x^2$,解得 $x=\pm5$,$\therefore$ 点 A 的坐标为 $\left(-5,-\frac{25}{3}\right)$,点 B 的坐标为 $\left(5,-\frac{25}{3}\right)$,$\therefore$ 这时水面的宽度为 10 m. 故选 C.



5. 14 米 【解析】由题意知,点 M 为抛物线的顶点,其坐标为 $(6,3.2)$,故可设抛物线的表达式为 $y=a(x-6)^2+3.2$. 将点 $A(0,1.4)$代入表达式,得 $1.4=a(0-6)^2+3.2$,解得 $a=-\frac{1}{20}$,$\therefore$ 抛物线的表达式为 $y=-\frac{1}{20}(x-6)^2+3.2$. 令 $y=0$,得 $-\frac{1}{20}(x-6)^2+3.2=0$,解得 $x_1=-2$(舍去),$x_2=14$,$\therefore$ 水柱落地点 C 距喷头底部的水平距离为 14 米.

思路分析

(1)根据题意可得 $B(0,4)$,$C\left(3,\frac{17}{2}\right)$,利用待定系数法可得抛物线的表达式,将一般式化为顶点式即可得点 D 的坐标,进而得到拱顶 D 到地面 OA 的距离.

6.【解】(1)根据题意得 $B(0,4)$,$C\left(3,\frac{17}{2}\right)$. 把 $B(0,4)$,$C\left(3,\frac{17}{2}\right)$代入 $y=-\frac{1}{6}x^2+bx+c$ 得 $\begin{cases}c=4,\\-\frac{1}{6}\times3^2+3b+c=\frac{17}{2},\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}b=2,\\c=4,\end{cases}$

所以该抛物线的函数表达式为 $y=-\frac{1}{6}x^2+2x+4=-\frac{1}{6}(x-6)^2+10$,所以 $D(6,10)$,所以拱顶 D 到地面 OA 的距离为 10 m.

(2)因为 $y=-\frac{1}{6}(x-6)^2+10$,所以抛物线的对称轴为直线 $x=6$. 由题意得货运汽车最外侧与地面 OA 的交点为$(2,0)$或$(10,0)$. 当 $x=2$ 时,$y=\frac{22}{3}>6$;当 $x=10$ 时,$y=\frac{22}{3}>6$. 所以这辆货车能安全通过.

(3)令 $y=8$，则 $-\frac{1}{6}(x-6)^2+10=8$，解得 $x_1=6+2\sqrt{3}$，$x_2=6-2\sqrt{3}$，则 $x_1-x_2=4\sqrt{3}$，所以两排灯的水平距离最小是 $4\sqrt{3}$ m.

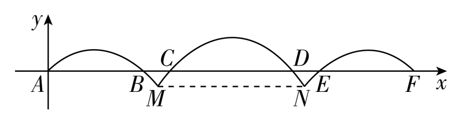
刷提升

1. D 【解析】①当 AB 的长是 10 m 时，BC 的长是 $28-10=18$(m)，∴ 劳动基地 $ABCD$ 的面积是 $10\times18=180$(m^2)，故①正确. ②设 $AB=x$ m，则 $BC=(28-x)$ m. 根据题意得 $x(28-x)=192$，整理得 $x^2-28x+192=0$，解得 $x=12$ 或 $x=16$，∴ AB 的长有两个不同的值满足劳动基地 $ABCD$ 的面积为 192 m^2，故②正确. ③设 $AB=x$ m，劳动基地 $ABCD$ 的面积为 S m^2，则 $BC=(28-x)$ m. 根据题意得 $\begin{cases}x\geqslant8,\\28-x\geqslant12,\end{cases}$ 解得 $8\leqslant x\leqslant16$. 由题意得，$S=x(28-x)=-x^2+28x=-(x-14)^2+196$. ∵ $-1<0$，$8\leqslant x\leqslant16$，∴ 当 $x=14$ 时，S 有最大值，最大值为 196，当 $x=8$ 时，S 有最小值，最小值为 160，故③正确. 故正确的结论有 3 个. 故选 D.

2. A 【解析】∵ $DE\perp AB$，∴ $\tan B=\frac{4}{3}=\frac{DE}{BE}$. 设 $DE=4m$，$BE=3m$，则 $BD=5m=x$，∴ $m=\frac{x}{5}$，∴ $DE=\frac{4x}{5}$，$BE=\frac{3x}{5}$. ∵ EF 为 Rt△DEA 的中线，∴ $y=\frac{1}{4}AE\cdot DE=\frac{1}{4}\left(AB-\frac{3x}{5}\right)\cdot\frac{4x}{5}=-\frac{3}{25}x^2+\frac{x}{5}AB$. ∵ 当 $x=5$ 时，y 取最大值，∴ $-\frac{\frac{1}{5}AB}{2\times\left(-\frac{3}{25}\right)}=5$，∴ $AB=6$. 由题意得，当 $x=8$ 时，点 C 和点 D 重合，∴ $BC=8$，∴ AB 边上的高 $CE=\frac{32}{5}$，∴ △ABC 的面积为 $\frac{1}{2}\times6\times\frac{32}{5}=\frac{96}{5}$. 故选 A.

关键点拨 解题的关键是结合题图(2)中 x 和 y 的关系分别得出 AB 的长和 AB 边上的高.

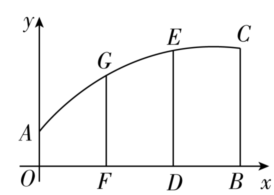
3. 0.5　108 【解析】根据题意得小张的步长为 $\frac{270}{540}=0.5$(米). 以点 A 为原点，AF 所在直线为 x 轴，步长为单位长度建立平面直角坐标系，如图所示，则 $B(140,0)$，$C(180,0)$，$D(360,0)$. 设 AM 段抛物线的表达式为 $y=a(x-70)^2+b$. 将 $B(140,0)$ 代入得 $a(140-70)^2+b=0$，∴ $b=-70^2a$，∴ AM 段抛物线的表达式为 $y=a(x-70)^2-70^2a$. ∵ 三条抛物线的形状相同，CD 的中点坐标为(270,0)，∴ 设 MN 段抛物线的表达式为 $y=a(x-270)^2+c$. 将 $C(180,0)$ 代入得 $a(180-270)^2+c=0$，∴ $c=-90^2a$，∴ MN 段抛物线的表达式为 $y=a(x-270)^2-90^2a$. 令 $a(x-270)^2-90^2a=a(x-70)^2-70^2a$，解得 $x=162$，即点 M 的横坐标为 162，由对称性知点 N 的横坐标为 378，∴ $MN=378-162=216$(步)，$216\times0.5=108$(米). 故答案为 0.5，108.



刷有所得 先确定抛物线经过的点，再根据点的坐标求得抛物线表达式.

刷素养

4.【解】(1)如图(1).



图(1)

由题意可知 $A(0,1)$，$E(4,3)$，$C(6,3)$. 设改造前的抛物线的函数表达式为 $y=ax^2+bx+c$，

∴ $\begin{cases}c=1,\\16a+4b+c=3,\\36a+6b+c=3,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=-\frac{1}{12},\\b=\frac{5}{6},\\c=1,\end{cases}$

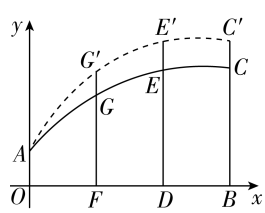
∴ 改造前的抛物线的函数表达式为 $y=-\frac{1}{12}x^2+\frac{5}{6}x+1$.

(2)∵ $y=-\frac{1}{12}x^2+\frac{5}{6}x+1=-\frac{1}{12}(x-5)^2+\frac{37}{12}$，∴ 当 $x=5$ 时，y 取得最大值 $\frac{37}{12}$，∴ 改造前大棚的最大高度为 $\frac{37}{12}$ 米.

(3)∵ 改造前的抛物线的函数表达式为 $y=-\frac{1}{12}x^2+\frac{5}{6}x+1=-\frac{1}{12}(x-5)^2+\frac{37}{12}$，∴ 当 $x=2$ 时，$y=-\frac{1}{12}(2-5)^2+\frac{37}{12}=\frac{7}{3}$，∴ $FG=\frac{7}{3}$ m. ∵ $DE=BC=3$ m，$EE'=CC'$，∴ $DE'=BC'$，∴ 改

思路分析 (3)根据已知条件设改造后抛物线表达式为 $y=m(x-5)^2+n$，进而表示出 G'，E' 的坐标，得到关于 m 的不等式，进而得到 CC' 的最大值.

造后抛物线对称轴为直线 $x=5$，∴ 设改造后抛物线表达式为 $y=m(x-5)^2+n$，把 $A(0,1)$ 代入得 $25m+n=1$，∴ $n=1-25m$，∴ $y=mx^2-10mx+1$. 如图(2)，当 $x=2$ 时，$y=m\times2^2-10m\times2+1=-16m+1$，当 $x=4$ 时，$y=m\times4^2-10m\times4+1=-24m+1$，∴ $G'(2,-16m+1)$，$E'(4,-24m+1)$，∴ $GG'+EE'=-16m+1-\frac{7}{3}+(-24m+1-3)=-40m-\frac{10}{3}$，∴ $\left(-40m-\frac{10}{3}\right)\times200\times60\leq40\ 000$，解得 $m\geq-\frac{1}{6}$. ∵ $CC'=EE'=-24m+1-3=-24m-2$，∴ 当 $m=-\frac{1}{6}$ 时，CC' 取最大值，最大值为 $-24\times\left(-\frac{1}{6}\right)-2=2$，∴ CC' 的最大值为 2 米.



图(2)

课时 2　生产销售问题

刷基础

1. C　【解析】设每件商品降价 x 元，每天的销售额为 y 元. 依题意有 $y=(35-x)(50+2x)=-2(x-5)^2+1\ 800$. ∵ $-2<0$，∴ 当 $x=5$ 时，y 有最大值，最大值为 1 800，∴ 每天的最大销售额为 1 800 元. 故选 C.

2.【解】(1) ∵ 每平方米种植的株数每增加 1 株，单株产量减少 0. 5 千克，∴ $y=4-0.5(x-2)=-0.5x+5$.

答：y 关于 x 的函数表达式为 $y=-0.5x+5(2\leq x\leq8$，且 x 为整数).

(2) 设每平方米获得的产量为 W 千克.

根据题意得 $W=x(-0.5x+5)=-0.5x^2+5x=-0.5(x-5)^2+12.5$. ∵ $-0.5<0$，∴ 当 $x=5$ 时，W 取最大值，最大值为 12. 5.

答：每平方米种植 5 株时，能获得最大的产量，最大产量为 12. 5 千克.

关键点拨

(1) 根据每平方米种植的株数每增加 1 株，单株产量减少 0. 5 千克列式即可.

(2) 产量 = 每平方米种植株数 × 单株产量，据此列函数关系式，进而根据二次函数的性质求解.

3.【解】(1) 设 y 与 x 之间的函数关系式为 $y=kx+b$. 由表格可得 $\begin{cases}40k+b=164,\\50k+b=124,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=-4,\\b=324,\end{cases}$ ∴ $y=-4x+324(30\leq x\leq80$，且 x 是整数).

(2) 由题意可得 $w=x(-4x+324)-2\ 000=-4x^2+324x-2\ 000$，故 $w=-4x^2+324x-2\ 000(30\leq x\leq80$，且 x 为整数).

(3) $w=-4x^2+324x-2\ 000=-4\left(x-\frac{81}{2}\right)^2+4\ 561$. ∵ $30\leq x\leq80$，且 x 是整数，∴ 当 $x=40$ 或 41 时，w 取得最大值，此时 $w=4\ 560$.

答：该影院将电影票售价定为 40 元或 41 元时，每天获利最大，最大利润是 4 560 元.

关键点拨

(2) 根据每天的销售利润 = 每件的销售利润 × 销售量得出函数表达式，再配方成顶点式，根据二次函数的性质求解；

(3) 根据每天获得 104 元的利润列出关于 x 的一元二次方程，解之即可.

4.【解】(1) 设 y 与 x 之间的函数关系式为 $y=kx+b$. 将 (10，30)，(16，24) 代入，得 $\begin{cases}10k+b=30,\\16k+b=24,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=-1,\\b=40,\end{cases}$ ∴ y 与 x 之间的函数关系式为 $y=-x+40(10\leq x\leq16)$.

(2) 根据题意知 $W=(x-10)y=(x-10)(-x+40)=-x^2+50x-400=-(x-25)^2+225$. ∵ $-1<0$，∴ 当 $x<25$ 时，W 随 x 的增大而增大. ∵ $10\leq x\leq16$，∴ 当 $x=16$ 时，W 取得最大值，最大值为 144. 故每件售价为 16 元时，每天的销售利润最大，最大利润是 144 元.

(3) 令 $W=104$，即 $-(x-25)^2+225=104$，∴ $x=14$ 或 $x=36$(舍去).

答：如果每天获得 104 元的利润，那么每件售价为 14 元.

刷提升

1. C　【解析】设生产第 k 档次产品每天获得的总利润为 y 元. 第 k 档次产品比最低档次产品提高了 $(k-1)$ 个档次，所以 $y=[60-3(k-1)]\cdot[8+2(k-1)]=-6(k-9)^2+864$，所以当 $k=9$ 时，每天获得的总利润最大. 故选 C.

2. D　【解析】设 $y_1=kx$，把 $P(1,2)$ 代入得 $2=k$，∴ $y_1=2x$. 设 $y_2=ax^2$，把 $Q(2,2)$ 代入得 $2=4a$，解得 $a=\frac{1}{2}$，∴ $y_2=\frac{1}{2}x^2$. 设这位专业户投入种植果树的资金为 m 万元，则投入种植茶树的资金为 $(10-m)$ 万元. 设他获得的总利润为 w 万元. 由题意得 $w=2(10-m)+\frac{1}{2}m^2=\frac{1}{2}m^2-2m+20=\frac{1}{2}(m-2)^2+18$，∴ 该二次函数的图象开口向上，对称轴为直线 $m=2$. ∵ $0\leq m\leq10$，∴ 当 $m=10$ 时，w 有最大值，最大值为 50，故他能获得的最大总利润是 50 万元，故选 D.

3.【解】(1)设 y 关于 x 的函数表达式为 $y=kx+b(k\neq0)$.

根据题意,得$\begin{cases}40k+b=300,\\45k+b=250,\end{cases}$解得$\begin{cases}k=-10,\\b=700,\end{cases}$

$\therefore y$ 关于 x 的函数表达式为 $y=-10x+700$.

(2)由题表数据可知,每件商品进价为 $\frac{300\times40-3\ 000}{300}=30$(元),则该商品的日销售利润 $w=(x-30)y=(x-30)(-10x+700)=-10x^2+1\ 000x-21\ 000=-10(x-50)^2+4\ 000$.

$\because -10<0,\therefore$ 当 $x=50$ 时,w 有最大值,最大值为 4 000,$\therefore$ 当该商品的售价是 50 元/件时,日销售利润最大,最大利润为 4 000 元.

(3)设每天扣除捐赠后的日销售利润为 w' 元.

根据题意,得 $w'=(x-30-m)(-10x+700)=-10x^2+(1\ 000+10m)x-21\ 000-700m$,$\therefore$ 该函数图象的对称轴为直线 $x=-\frac{1\ 000+10m}{2\times(-10)}=50+\frac{m}{2}$. $\because -10<0,\therefore$ 当 $x\leqslant50+\frac{m}{2}$时,w'随 x 的增大而增大. $\because$ 当 $x\leqslant52$ 时,每天扣除捐赠后的日销售利润随售价 x 的增大而增大,$\therefore 52\leqslant50+\frac{m}{2}$,解得 $m\geqslant4$. $\because m\leqslant6,\therefore m$ 的取值范围为 $4\leqslant m\leqslant6$.

4.【解】(1)设每个 B 种玩具的进价为 b 元,则每个 A 种玩具的进价为$(b+2)$元. 由题意可知 $\frac{600}{b+2}=\frac{500}{b}$,解得 $b=10$,经检验,$b=10$ 是原分式方程的解且符合题意,$\therefore b+2=12$. 故每个 B 种玩具的进价为 10 元,每个 A 种玩具的进价为 12 元.

(2)①设该超市销售这 50 个玩具日获利为 w 元. 由题意可知 $x+n=50,\therefore n=50-x$. 由题意可知 $w=(y-12)x+m=(-2x+80-12)x+16(50-x)-260=-2x^2+52x+540$. $\because$ 该超市销售这 50 个玩具日获利为 300 元,$\therefore -2x^2+52x+540=300$,解得 $x=30$ 或 $x=-4$(舍去),$\therefore n=50-x=20$. 设此时 B 种玩具的销售单价为 c 元/件,$\therefore m=16\times20-260=(c-10)\times20$,解得 $c=13$,$\therefore$ B 种玩具的销售单价是 13 元/件.

②设每个 A 种玩具降价后,超市销售这 50 个玩具的日获利为 w'元. 根据题意可知 $w'=(y-12-a)x+m=(-2x+80-12-a)x+16(50-x)-260=-2x^2+(52-a)x+540$,$\therefore$ 该函数图象的对称轴为直线 $x=-\frac{52-a}{2\times(-2)}=13-\frac{a}{4}$. $\because 0<a<6$,$\therefore 11\frac{1}{2}<13-\frac{a}{4}<13$. $\because$ B 种玩具的数量不少于 A 种玩具数量的 4 倍,$\therefore n\geqslant4x,\therefore 50-x\geqslant4x$,解得 $x\leqslant10$,$\therefore$ 当 $x=10$ 时,w'取得最大值,$\therefore -2\times10^2+10(52-a)+540=820$,解得 $a=4$,$\therefore a$ 的值为 4.

5 二次函数与一元二次方程

刷基础

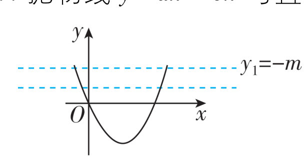
关键点拨 根据函数图象与 x 轴的一个交点坐标和二次函数图象具有对称性,可以写出该函数图象与 x 轴的另一个交点坐标,从而可以写出方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根.

1. A 【解析】$\because$ 该函数图象与 x 轴的一个交点坐标为(1,0),该函数图象的对称轴为直线 $x=-1$,$\therefore$ 该函数图象与 x 轴的另一个交点坐标为$(-3,0)$,$\therefore$ 方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根为 $x_1=1,x_2=-3$,故选 A.

2. C 【解析】由表格可知,抛物线的对称轴是直线 $x=\frac{-4+0}{2}=-2$,故②正确. 设抛物线表达式为 $y=a(x+2)^2+1$,将$(0,-3)$代入得 $4a+1=-3$,解得 $a=-1$. $\because -1<0,\therefore$ 抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 的开口向下,故①错误. 由抛物线关于直线 $x=-2$ 对称知,当 $y=0$ 时,$x=-1$ 或 $x=-3$,故关于 x 的方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根为 -1 和 -3,故③正确. 当 $y<0$ 时,x 的取值范围是 $x<-3$ 或 $x>-1$,故④正确. 故选 C.

3. 3 【解析】设平移后得到的抛物线的表达式为 $y=2x^2+4x-1+k$. $\because$ 平移后的图象与 x 轴只有一个公共点,$\therefore$ 对于方程 $2x^2+4x-1+k=0$,$\Delta=16+8-8k=0$,解得 $k=3$,即将二次函数 $y=2x^2+4x-1$ 的图象向上平移 3 个单位长度时,得到的函数图象与 x 轴只有一个公共点. 故答案为 3.

4. $m<0$ 【解析】由 $ax^2+bx+m=0$ 得 $ax^2+bx=-m$. 令 $y_1=-m$. $\because$ 一元二次方程 $ax^2+bx+m=0$ 的两个实数根异号,$\therefore$ 抛物线 $y=ax^2+bx$ 与直线 $y_1=-m$ 交点的横坐标异号. 如图,由图可得抛物线 $y=ax^2+bx$ 与直线 $y_1=-m$ 的交点在 x 轴上方时,交点的横坐标异号,$\therefore -m>0$,解得 $m<0$. 故答案为 $m<0$.



另解 对给出的等式变形后,可以将 $x-1$ 当作整体和题目中的二次函数表达式进行对比,所以只需让 $x-1$ 分别等于 -3 和 4 即可求解.

5. $x_1=-2,x_2=5$ 【解析】关于 x 的一元二次方程 $a(x-1)^2+c=b-bx$ 可变形为 $a(x-1)^2+b(x-1)+c=0$,把抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 沿 x 轴向右平移一个单位长度得到抛物线 $y=a(x-1)^2+b(x-1)+c$. $\because$ 抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 经过点 $A(-3,0),B(4,0)$,$\therefore$ 抛物线 $y=a(x-1)^2+b(x-1)+c$ 与 x 轴的两交点坐标为$(-2,0),(5,0)$,$\therefore$ 一元二次方程 $a(x-1)^2+b(x-1)+c=0$ 的解为 $x_1=-2,x_2=5$.

6. (1)【证明】对于方程 $x^2+(m-3)x+1-2m=0$,$\Delta=(m-3)^2-4(1-2m)=m^2+2m+5=(m+1)^2+4>0$,所以方程有两个不相等的实数根,所以不论 m 为何值,该函数的图象与 x 轴总有两

个公共点.

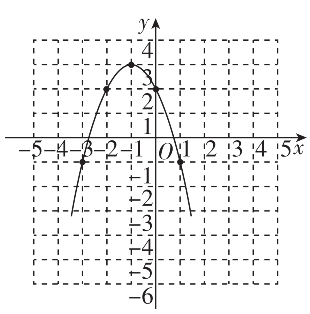
(2)【解】$y=x^2+(m-3)x+1-2m=(x-2)m+x^2-3x+1$. 因为不论 m 为何值,该函数的图象都会经过一个定点,所以 $x-2=0$,解得 $x=2$. 当 $x=2$ 时,$y=-1$,所以该函数图象始终过定点$(2,-1)$.

7. C 【解析】由题中表格可以看出,$y=0$ 对应的 x 值在 6.18 与 6.19 之间,即方程 $ax^2+bx+c=0$ 的一个根的取值范围为 $6.18<x<6.19$. 故选 C.

8.【解】(1)当 $x=-3$ 时,$y=-(-3)^2-2\times(-3)+2=-1$;当 $x=-2$ 时,$y=-(-2)^2-2\times(-2)+2=2$;当 $x=-1$ 时,$y=-(-1)^2-2\times(-1)+2=3$;当 $x=0$ 时,$y=-0^2-2\times0+2=2$;当 $x=1$ 时,$y=-1^2-2\times1+2=-1$. 填表如下:

x	…	-3	-2	-1	0	1	…
y	…	-1	2	3	2	-1	…

如图所示.



(2)$x_1\approx0.7$,$x_2\approx-2.7$.

刷提升

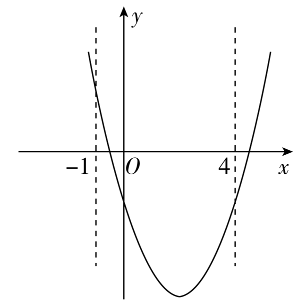
1. C 【解析】将 $A(2,3)$ 代入二次函数 $y=x^2+bx+3$,得 $4+2b+3=3$,∴ $b=-2$,∴ 二次函数的表达式为 $y=x^2-2x+3=(x-1)^2+2$. ∵ 方程 $x^2+bx=t-4$ 在 $-1<x<4$ 的范围内有实数根,∴ 二次函数 $y=x^2+bx+3$ 与函数 $y=t-1$ 的图象在 $-1<x<4$ 时有交点. 在二次函数 $y=x^2-2x+3$ 中,当 $x=-1$ 时,$y=6$;当 $x=4$ 时,$y=11$;当 $x=1$ 时,$y=2$,∴ $2\leq t-1<11$,∴ $3\leq t<12$. 故选 C.

2. B 【解析】$y=x(4-x+m)=-x^2+(m+4)x$,令 $y=0$,则 $-x^2+(m+4)x=0$. ∵ $\Delta=(m+4)^2-4\times(-1)\times0=(m+4)^2$,∴ 当 $m=-4$ 时,$\Delta=0$,此时抛物线与 x 轴只有一个交点,∴ 甲的说法不正确;令 $y=m$,则 $-x^2+(m+4)x=m$,∴ $x^2-(m+4)x+m=0$. ∵ $\Delta=[-(m+4)]^2-4\times1\times m=m^2+8m+16-4m=m^2+4m+16=(m+2)^2+12>0$,∴ 无论 m 为何值,G 与 L 总有两个交点,∴ 乙的说法不正确,丙的说法正确. 故选 B.

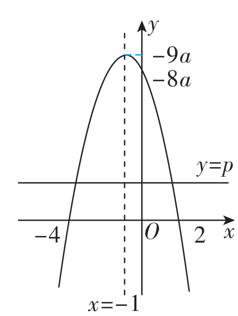
关键点拨 利用一元二次方程根的判别式进行判断是解题的关键.

3. $x=1.4$ 【解析】∵ 抛物线与 x 轴的一个交点为$(-3.4,0)$,抛物线的对称轴为直线 $x=-1$,∴ 抛物线与 x 轴的另一个交点坐标为$(1.4,0)$,∴ 方程的另一个近似根为 $x=1.4$. 故答案为 $x=1.4$.

4. 1　$2\leq m<7$ 【解析】抛物线 $y=ax^2-4x+2$ 的对称轴是直线 $x=-\dfrac{-4}{2a}=\dfrac{2}{a}$. ∵ 抛物线 $y=ax^2-4x+2$ 的顶点坐标为$(2,n)$,∴ 抛物线 $y=ax^2-4x+2$ 的对称轴是直线 $x=2$,∴ $\dfrac{2}{a}=2$,∴ $a=1$,∴ 抛物线的表达式为 $y=x^2-4x+2$,平移后抛物线表达式为 $y=x^2-4x+2-m$,如图,由题意得,直线 $x=-1$ 与平移后的抛物线交点在 x 轴上方,直线 $x=4$ 与平移后的抛物线交点在 x 轴上或 x 轴下方,即 $\begin{cases}1+4+2-m>0,\\16-16+2-m\leq0,\end{cases}$ 解得 $2\leq m<7$. 故答案为 1,$2\leq m<7$.



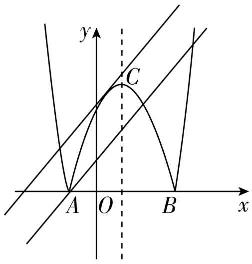
5. 3 【解析】∵ 抛物线 $y=ax^2+bx+c\ (a<0)$ 的对称轴为直线 $x=-1$,∴ $-\dfrac{b}{2a}=-1$,∴ $b=2a$. 又 ∵ 抛物线 $y=ax^2+bx+c\ (a<0)$ 与 x 轴的一个交点为$(2,0)$. 把$(2,0)$代入 $y=ax^2+bx+c$,得 $0=4a+4a+c$,∴ $c=-8a$,∴ $y=ax^2+2ax-8a\ (a<0)$,则函数的最大值为 $\dfrac{4a\cdot(-8a)-4a^2}{4a}=-9a$,∴ 抛物线的顶点坐标为$(-1,-9a)$. 令 $ax^2+2ax-8a=0$,即 $x^2+2x-8=0$,解得 $x=-4$ 或 $x=2$,∴ 当 $a<0$ 时,抛物线始终与 x 轴交于$(-4,0)$,$(2,0)$. 如图所示,当 $ax^2+bx+c=p\ (p>0)$ 有实数根时,$0<p\leq-9a$,$-4<x<2$,其中 x 为整数时,$x=-3,-2,-1,0,1$,∴ 一元二次方程 $ax^2+bx+c=p\ (p>0)$ 的整数根有 5 个. 由抛物线的对称性可知 $x=-3$ 与 $x=1$ 时的函数值相等,$x=-2$ 与 $x=0$ 时的函数值相等,当 $x=-1$ 时,直线 $y=p$ 恰好过抛物线顶点,∴ p 的值有 3 个. 故答案为 3.



思路分析 根据抛物线 $y=ax^2+bx+c\ (a<0)$ 的对称轴为直线 $x=-1$,与 x 轴的一个交点为$(2,0)$可得 $b=2a$,$c=-8a$,故抛物线的顶点坐标为$(-1,-9a)$,与 x 轴的另一个交点为$(-4,0)$,然后将所求问题转化为抛物线与直线 $y=p$ 在 x 轴上方的交点中,横坐标为整数时,求纵坐标的值的个数.

6. 1 或 $\dfrac{13}{4}$ 【解析】∵ 抛物线的表达式为 $y=(x-1)^2-4$,∴ 抛物线的顶点坐标为$(1,-4)$. 令 $y=0$,则 $(x-1)^2-4=0$,解得 $x_1=-1$,$x_2=3$,∴ $A(-1,0)$,$B(3,0)$. 根据翻折变换,点$(1,-4)$关于 x 轴的对称点 C 为$(1,4)$,∴ 曲线 ACB 所对应的函数表达式为 $y=-(x-1)^2+4\ (-1\leq x\leq3)$. 当直线 $y=x+b$ 与新图象恰有

三个公共点时,如图所示.



①当直线 $y=x+b$ 过点 A 时,$0=-1+b$,解得 $b=1$;②当直线 $y=x+b$ 与抛物线 $y=-(x-1)^2+4(-1\leqslant x\leqslant 3)$ 只有一个公共点时,$-(x-1)^2+4=x+b$,即 $x^2-x-(3-b)=0$,$\therefore \Delta=1+4(3-b)=13-4b=0$,解得 $b=\frac{13}{4}$. 综上所述,b 的值为 1 或 $\frac{13}{4}$. 故答案为 1 或 $\frac{13}{4}$.

刷素养

7.【解】(1)①图象关于 y 轴对称;当 $x=-1$ 或 $x=1$ 时,y 取最大值,最大值为 0;当 $x<-1$ 或 $0<x<1$ 时,y 随 x 的增大而增大;当 $-1<x<0$ 或 $x>1$ 时,y 随 x 的增大而减小等.(写出一条即可)

②$x_1=-2$,$x_2=0$,$x_3=2$.

③$-1<a<0$.

(2)将函数 $y=-(|x|-1)^2$ 的图象先向右平移 2 个单位长度,再向上平移 3 个单位长度(或先向上平移 3 个单位长度,再向右平移 2 个单位长度)得到函数 $y_1=-(|x-2|-1)^2+3$ 的图象.

当 $2<y_1\leqslant 3$ 时,自变量 x 的取值范围为 $0<x<4$ 且 $x\neq 2$.

关键点拨

(2)根据“上加下减”的平移规律,得到函数 $y_1=-(|x-2|-1)^2+3$ 的图象,即可得到结论.

大招专题 4　二次函数图象中的交点问题

刷难关

大招解读｜确定图形找临界状态

(1)根据已知条件画出确定的图形.

(2)将直线在坐标系中上下平移,找到符合题意的临界位置.

(3)联立直线和抛物线的表达式得一元二次方程,利用 Δ 求解.

(4)临界位置之间的部分即为满足题意的部分.

1.【解】(1)c_1 的表达式为 $y=-x^2-2x+3$. $\because$ 抛物线 c_1 的顶点为 $A(-1,4)$,$\therefore$ 设抛物线 c_1 的表达式为 $y=a(x+1)^2+4$. 把 $D(0,3)$ 代入 $y=a(x+1)^2+4$ 得 $3=a+4$,$\therefore a=-1$,$\therefore$ 抛物线 c_1 的表达式为 $y=-(x+1)^2+4$,即 $y=-x^2-2x+3$.

(2)由 $\begin{cases}y=-x^2-2x+3,\\ y=x+m,\end{cases}$ 得 $x^2+3x+m-3=0$.

$\because$ 直线 l_1:$y=x+m$ 与 c_1 有唯一的交点,

$\therefore \Delta=9-4m+12=0$,$\therefore m=\frac{21}{4}$.

(3)$\because$ 抛物线 c_1 关于 y 轴对称的抛物线记作 c_2,$\therefore$ 抛物线 c_2 的顶点坐标为 $(1,4)$,与 y 轴的交点为 $D(0,3)$,$\therefore$ 抛物线 c_2 的表达式为 $y=-x^2+2x+3$.

①当直线 l_2 过抛物线 c_1 的顶点 $(-1,4)$ 和抛物线 c_2 的顶点 $(1,4)$,即 $n=4$ 时,l_2 与 c_1 和 c_2 共有两个交点.

②当直线 l_2 过 $D(0,3)$,即 $n=3$ 时,l_2 与 c_1 和 c_2 共有三个交点.

③当 $n<3$ 或 $3<n<4$ 时,l_2 与 c_1 和 c_2 共有四个交点.

2. $k=2$ 或 $6<k\leqslant 11$　【解析】$y=-x^2+4x-2=-(x-2)^2+2$,将抛物线向上平移 $k(k>0)$ 个单位长度后得到的抛物线的表达式为 $y=-(x-2)^2+2+k$. 当抛物线顶点恰好平移到线段 MN 上时,$2+k=4$,解得 $k=2$. 当平移后的抛物线经过点 $M(0,4)$ 时,$-(0-2)^2+2+k=4$,解得 $k=6$,此时 $M(0,4)$ 关于对称轴直线 $x=2$ 对称的点的坐标为 $(4,4)$,在线段 MN 上,不符合题意. 当平移后的抛物线经过点 $N(5,4)$ 时,$-(5-2)^2+2+k=4$,解得 $k=11$,此时 $N(5,4)$ 关于对称轴直线 $x=2$ 对称的点的坐标为 $(-1,4)$,不在线段 MN 上,符合题意. 结合图象可知,平移后的抛物线与线段 MN 仅有一个交点时,$k=2$ 或 $6<k\leqslant 11$. 故答案为 $k=2$ 或 $6<k\leqslant 11$.

刷有所得

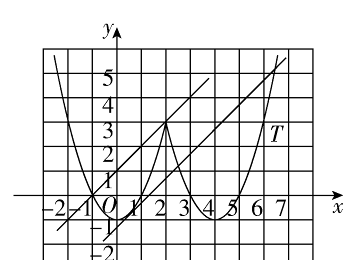
此类型题采用数形结合思想,结合图形,找出临界位置可得答案.

3. A　【解析】$\because$ 抛物线 C_1:$y=x^2-1$,将 C_1 向右平移 4 个单位长度,得到抛物线 C_2,$\therefore$ 抛物线 C_2 的表达式为 $y=(x-4)^2-1$.

联立得 $\begin{cases}y=x^2-1,\\ y=(x-4)^2-1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=2,\\ y=3,\end{cases}$

$\therefore$ 两抛物线的交点坐标为 $(2,3)$.

由题意得图形 T 如图所示.



把 $(2,3)$ 代入 $y=x+n$,得 $3=2+n$,解得 $n=1$. 当直线 $y=x+n$ 与 C_1 只有一个交点时,$x+n=x^2-1$,即 $x^2-x-1-n=0$ 有两个相等的实数根,$\therefore \Delta=1-4\times1\times(-n-1)=0$,解得 $n=-\frac{5}{4}$. $\because$ 直线 $y=x+n$ 与图形 T 恰好有 4 个交点,$\therefore$ 结合

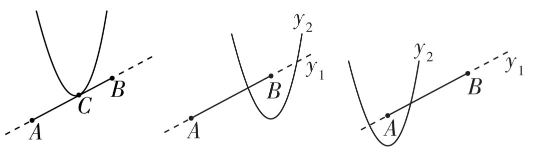
图形可知，$-\frac{5}{4}<n<1$. 故选 A.

大招解读 | 端点值代入法

(1)联立抛物线和线段所在直线的表达式得到一元二次方程；

(2)抛物线与线段 AB 仅有一个交点 C 时：

情况 1：如图(1)，满足条件 $\Delta=0$ 且 $x_A<x_C<x_B$.

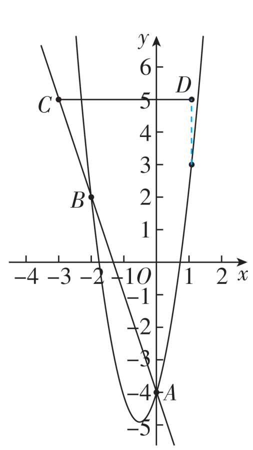


图(1)　　图(2)　　图(3)

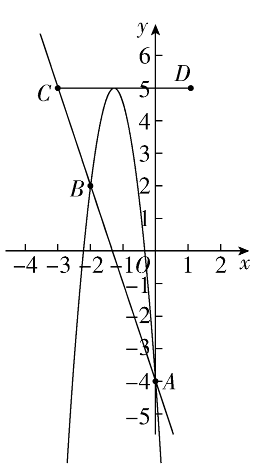
情况 2：如图(2)，满足条件 $\Delta>0$ 且 $x=x_B$ 时，$y_1\geqslant y_2$；$x=x_A$ 时，$y_2>y_1$.

情况 3：如图(3)，满足条件 $\Delta>0$ 且 $x=x_B$ 时，$y_2>y_1$；$x=x_A$ 时，$y_1\geqslant y_2$.

4.【解】设直线 AB 的表达式为 $y=kx+n(k\neq0)$. 把点 $A(0,-4)$ 和 $B(-2,2)$ 代入得 $\begin{cases}n=-4,\\-2k+n=2,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=-3,\\n=-4,\end{cases}$ ∴ 直线 AB 的表达式为 $y=-3x-4$. 把 $C(m,5)$ 代入，得 $m=-3$，∴ $C(-3,5)$，由平移得 $D(1,5)$. ∵ 二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象经过点 $A(0,-4)$ 和 $B(-2,2)$，∴ $\begin{cases}c=-4,\\4a-2b+c=2,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}c=-4,\\b=2a-3,\end{cases}$ ∴ $y=ax^2+(2a-3)x-4$. ①当 $a>0$ 时，若抛物线与线段 CD 只有一个公共点，如图(1)，则抛物线上的点 $(1,a+2a-3-4)$ 在 D 点的下方，∴ $a+2a-3-4<5$，解得 $a<4$，∴ $0<a<4$.



图(1)



图(2)

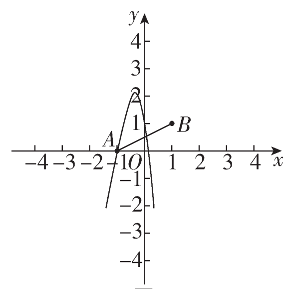
②当 $a<0$ 时，若抛物线的顶点在线段 CD 上，则抛物线与线段 CD 只有一个公共点，如图(2)，∴ $\frac{4ac-b^2}{4a}=5$，即 $\frac{4a\times(-4)-(2a-3)^2}{4a}=5$，解得 $a=-3+\frac{3}{2}\sqrt{3}$(舍去)或 $a=-3-\frac{3}{2}\sqrt{3}$.

思路分析

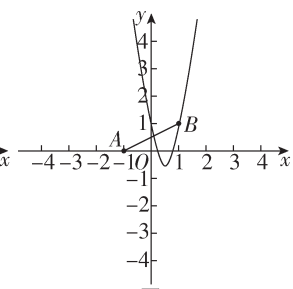
由已知求得平移后的抛物线的表达式，两表达式联立，求得交点坐标为 $(2,3)$，由题意画出图形 T，再运用数形结合思想解题即可.

综上，a 的取值范围是 $0<a<4$ 或 $a=-3-\frac{3}{2}\sqrt{3}$.

5. $m\leqslant-2$ 或 $1\leqslant m<\frac{9}{8}$　**【解析】**①如图(1)，当 $m<0$ 时，抛物线对称轴为直线 $x=\frac{1}{2m}<0$，∴ $x=-1$ 时，$y=mx^2-x+1=m+1+1\leqslant0$，解得 $m\leqslant-2$，∴ $m\leqslant-2$.



图(1)



图(2)

②如图(2)，当 $m>0$ 时，∵ 点 $A(-1,0)$，$B(1,1)$，设直线 AB 的表达式为 $y=kx+b$，∴ $\begin{cases}-k+b=0,\\k+b=1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=\frac{1}{2},\\b=\frac{1}{2},\end{cases}$ ∴ 直线 AB 的表达式为 $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$. 令 $\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}=mx^2-x+1$，整理得 $mx^2-\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}=0$. ∵ 二次函数 $y=mx^2-x+1$ 的图象与线段 AB 有两个不同的交点，∴ $\Delta=\left(-\frac{3}{2}\right)^2-4m\times\frac{1}{2}>0$，且 $x=1$ 时，$y=mx^2-x+1=m-1+1\geqslant1$，∴ $1\leqslant m<\frac{9}{8}$.

综上，m 的取值范围为 $m\leqslant-2$ 或 $1\leqslant m<\frac{9}{8}$.

重难专题　抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与系数之间的关系

刷难关

1. $m<1$　**【解析】**∵ 抛物线 $y=(m-1)x^2+2mx+1$ 的开口向下，∴ $m-1<0$，解得 $m<1$. 故答案为 $m<1$.

2. -2(答案不唯一)　**【解析】**当 $x=0$ 时，$y=0+0+m=m$，∴ 抛物线与 y 轴的交点坐标为 $(0,m)$. ∵ 抛物线与 y 轴的交点在原点下方，∴ $m<0$，∴ m 的值可以是 -2. 故答案为 -2(答案不唯一).

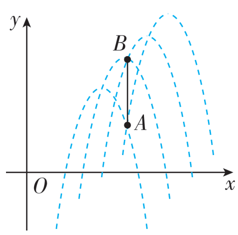
关键点拨

依据题意，分三种情况：当 $\frac{m+4}{2}\geqslant2$ 时，当 $\frac{m+4}{2}\leqslant-1$ 时，当 $-1<\frac{m+4}{2}<2$ 时，分别进行讨论即可得解.

3. $m\geqslant4$　**【解析】**抛物线 $y=x^2-(m+4)x+3m+2$ 的开口向上，对称轴为直线 $x=\frac{m+4}{2}$. ①当 $\frac{m+4}{2}\geqslant2$，即 $m\geqslant0$ 时，要使在 $-1\leqslant x\leqslant2$ 的范围

内 $y\geq2$ 恒成立，只需 $x=2$ 时的函数值大于等于 2，即 $2^2-2(m+4)+3m+2\geq2$，解得 $m\geq4$. 结合 $m\geq0$，得 $m\geq4$. ②当 $\frac{m+4}{2}\leq-1$，即 $m\leq-6$ 时，要使在 $-1\leq x\leq2$ 的范围内 $y\geq2$ 恒成立，只需 $x=-1$ 时的函数值大于等于 2，即 $(-1)^2+(m+4)+3m+2\geq2$，解得 $m\geq-\frac{5}{4}$，结合 $m\leq-6$，得无解. ③当 $-1<\frac{m+4}{2}<2$，即 $-6<m<0$ 时，要使在 $-1\leq x\leq2$ 的范围内 $y\geq2$ 恒成立，只需 $x=\frac{m+4}{2}$ 时的函数值大于等于 2，即 $\left(\frac{m+4}{2}\right)^2-(m+4)\cdot\frac{m+4}{2}+3m+2\geq2$，∴ $(m-2)^2+12\leq0$. 又∵ $(m-2)^2+12\geq12$，∴ 无解. 综上，$m\geq4$. 故答案为 $m\geq4$.

4. D　【解析】把 $A(4,2)$ 代入 $y=-(x-t)^2+t(t\geq0)$ 得 $2=-(4-t)^2+t$，解得 $t=3$ 或 $t=6$. 把 $B(4,4)$ 代入 $y=-(x-t)^2+t(t\geq0)$ 得 $4=-(4-t)^2+t$，解得 $t=4$ 或 $t=5$. 结合图象可知，当 L 与线段 AB 有公共点时，t 的取值范围是 $3\leq t\leq4$ 或 $5\leq t\leq6$，故选 D.



5. D　【解析】∵ 二次函数 $y=ax^2+bx+c$（a,b,c 是常数，$a\neq0$）中，当 $x=0$ 时，$y=c=-2$，当 $x=1$ 时，$y=a+b+c=-2$，∴ $a+b=0$，∴ $b=-a$，∴ $-\frac{b}{2a}=\frac{1}{2}$，∴ 二次函数图象的对称轴为直线 $x=\frac{1}{2}$，∴ ③正确. 又∵ 当 $x=-\frac{1}{2}$ 时，$y>0$，当 $x=0$ 时，$y<0$，$-\frac{1}{2}<0<\frac{1}{2}$，∴ 二次函数图象开口向上，∴ $a>0$，∴ $b<0$，∴ $abc>0$，∴ ①正确. ∵ $x=-2$ 时，$y=t$，二次函数图象的对称轴为直线 $x=\frac{1}{2}$，∴ $x=3$ 时，$y=t$，∴ -2 和 3 是关于 x 的方程 $ax^2+bx+c=t$ 的两个实数根，∴ ②正确. ∵ $x=-1$ 时，$y=a-b-2=m$；$x=2$ 时，$y=4a+2b-2=n$，∴ $m+n=a-b-2+4a+2b-2=5a+b-4=4(a-1)$. ∵ $x=-\frac{1}{2}$ 时，$y=\frac{1}{4}a-\frac{1}{2}b-2=\frac{3}{4}a-2>0$，∴ $a>\frac{8}{3}$，∴ $m+n>\frac{20}{3}$，∴ ④错误. 综上，正确的结论有 3 个. 故选 D.

思路分析

利用待定系数法将 $(0,-2)$，$(1,-2)$ 代入表达式求出 $c=-2$，$a+b=0$，进而得出抛物线的对称轴，即可判断结论③；再结合二次函数图象与已知信息得出 $a>0$，进而判断结论①；由二次函数图象的对称性得到 $x=3$ 时，$y=t$，进而判断结论②；将 $(-1,m)$，$(2,n)$ 代入表达式得出 $m+n=4(a-1)$，再由 $x=-\frac{1}{2}$ 时，$y>0$，得到 $a>\frac{8}{3}$，进而判断结论④.

6. ①②④　【解析】由题图可得，$a<0$，$c>0$. ∵ 抛物线的对称轴为直线 $x=1$，∴ $-\frac{b}{2a}=1$，∴ $b=-2a$，$b>0$，故①正确. ∵ 抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 经过点 $(-2,0)$，∴ 根据抛物线的对称性可得抛物线与 x 轴的另一个交点坐标为 $(4,0)$. 由图象得当 $-2<x<4$ 时，$y>0$，∴ 当 $x=2$ 时，$y=4a+2b+c>0$，故②正确. ∵ 抛物线开口向下，对称轴为直线 $x=1$，∴ 当 $x>1$ 时，y 随 x 的增大而减小，横坐标是 $1-n$ 的点的对称点的横坐标为 $1+n$. ∵ $n>m>0$，∴ $1+n>1+m>1$，∴ $x=1+m$ 时的函数值大于 $x=1+n$ 时的函数值，∴ $x=1+m$ 时的函数值大于 $x=1-n$ 时的函数值，故③错误. ∵ $b=-2a$，抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 经过点 $(-2,0)$，∴ $0=4a+4a+c$，即 $c=-8a$，∴ $-\frac{c}{2a}=4$. ∵ 抛物线过点 $(4,0)$，∴ 点 $\left(-\frac{c}{2a},0\right)$ 一定在此抛物线上，故④正确. 故答案为①②④.

7. ①②　【解析】由 $y=a(x+1)^2+n$（$a<0$，n 为常数）知，抛物线开口向下，对称轴为直线 $x=-1$，∴ 抛物线与 x 轴的另一个交点在 $(0,0)$ 和 $(1,0)$ 之间，∴ $x=1$ 时，$y=a+b+c<0$，故①正确. 抛物线对称轴为直线 $x=-\frac{b}{2a}=-1$，∴ $2a-b=0$，故②正确. 一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两根为 x_1,x_2，则 $x_1+x_2=-\frac{b}{a}=-2$，故③错误. ∵ $2a-b=0$，∴ $b=2a$，∴ $a(m^2-1)+(m-1)b=a(m^2-1)+2a(m-1)=a(m+1)^2-4a$. ∵ $a<0$，∴ $a(m+1)^2-4a\leq-4a$，且 $-4a>0$，故④错误. 故答案为①②.

全章综合训练

刷中考

1. C　【解析】∵ 二次函数表达式为 $y=-(x-2)^2+c$，∴ 二次函数 $y=-(x-2)^2+c$ 的图象开口向下，对称轴为直线 $x=2$，∴ 离对称轴越近，函数值越大. ∵ $|-2-2|=4$，$|3-2|=1$，$|7-2|=5$，且 $1<4<5$，∴ $y_2>y_1>y_3$，故选 C.

2. C　【解析】∵ 抛物线开口向上，∴ $a>0$. ∵ 抛物线对称轴在 y 轴右侧，∴ $-\frac{b}{2a}>0$，∴ $b<0$. ∵ 抛物线与 y 轴交于负半轴，∴ $c<0$，∴ $abc>0$，故 A 选项错误. 由题图易知 $-\frac{b}{2a}<1$，∴ $-b<2a$，∴ $2a+b>0$，故 B 选项错误. ∵ 抛物线过点 $(2,0)$，∴ $4a+2b+c=0$，∴ $c=-4a-2b$，∴ $2b-c=2b+4a+2b=4(a+b)$. 由题图易知 $-\frac{b}{2a}>\frac{1}{2}$，∴ $a+b<0$，∴ $2b-c<0$，故 C 选项正确. 由图象可知，当 $x=-1$ 时，$y>0$，∴ $a-b+c>0$，故 D 选项错误. 故选 C.

关键点拨

根据函数图象判断系数之间的关系即可.

3. $y=3x^2-2$ 【解析】∵ 将函数 $y=3x^2$ 的图象向下平移2个单位，∴ 平移后的新函数图象的表达式为 $y=3x^2-2$. 故答案为 $y=3x^2-2$.

4.【解】(1)把$(-2,-2)$和$(1,1)$代入 $y=ax^2+bx-2$，得$\begin{cases}4a-2b-2=-2,\\a+b-2=1,\end{cases}$

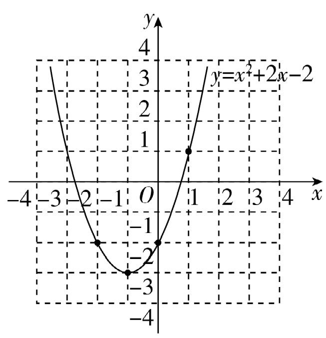
解得$\begin{cases}a=1,\\b=2,\end{cases}$

∴ 二次函数的表达式为 $y=x^2+2x-2$.

(2)将 $y=x^2+2x-2$ 配方，得 $y=(x+1)^2-3$，

∴ 二次函数图象的顶点坐标为$(-1,-3)$.

图象如图所示：



(3)$4-\sqrt{5}$或$1+\sqrt{5}$.

思路分析

(3)分 $n-1\geqslant3$，$0<n-1<3$，$n-1\leqslant0$ 且 $n>0$ 三种情况讨论即可.

抛物线向右平移 n 个单位长度后，得到抛物线 $y=(x+1-n)^2-3$，则平移后的抛物线的对称轴是直线 $x=n-1$，抛物线开口向上.

①当 $n-1\geqslant3$ 时，$n\geqslant4$，此时当 $x=0$ 时，y 取得最大值，为$(1-n)^2-3$；当 $x=3$ 时，y 取得最小值，为$(4-n)^2-3$.

又∵ 最大值与最小值的差为5，∴ $(1-n)^2-3-(4-n)^2+3=5$，∴ $n=\frac{10}{3}$(不合题意，舍去).

②当 $0<n-1<3$ 时，$1<n<4$，此时当 $x=0$ 时，$y=(1-n)^2-3$；当 $x=3$ 时，$y=(4-n)^2-3$；当 $x=n-1$ 时，y 取得最小值，为-3.

又∵ 最大值与最小值的差为5，∴ 当$(1-n)^2-3+3=5$ 时，解得 $n=1-\sqrt{5}$(不合题意，舍去)或$1+\sqrt{5}$；当$(4-n)^2-3+3=5$ 时，解得 $n=4+\sqrt{5}$(不合题意，舍去)或$4-\sqrt{5}$.

③当 $n-1\leqslant0$ 且 $n>0$ 时，$0<n\leqslant1$，此时当 $x=0$ 时，y 取得最小值，为$(1-n)^2-3$；当 $x=3$ 时，y 取得最大值，为$(4-n)^2-3$.

又∵ 最大值与最小值的差为5，∴ $(4-n)^2-3-(1-n)^2+3=5$，∴ $n=\frac{5}{3}$(不合题意，舍去).

综上，$n=1+\sqrt{5}$或$4-\sqrt{5}$.

5. (1)【解】∵ 点 $A(1,t)$ 和 $B(2,t)$ 在二次函数 $y=ax^2+bx-2$ 的图象上，

∴ 点 $A(1,t)$ 和 $B(2,t)$ 关于抛物线的对称轴对称，

∴ 抛物线的对称轴为直线 $x=-\frac{b}{2a}=\frac{1+2}{2}=\frac{3}{2}$，

∴ $\frac{b}{a}=-3$.

(2)(i)【解】由$\frac{b}{a}=-3$ 得 $b=-3a$，∴ 抛物线的表达式为 $y=ax^2+bx-2=ax^2-3ax-2=a\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}a-2$，

∴ 抛物线的顶点坐标为$\left(\frac{3}{2},-\frac{9}{4}a-2\right)$.

∵ 函数的最大值为 $1-\frac{3}{4}a^2$，

∴ $a<0$，$-\frac{9}{4}a-2=1-\frac{3}{4}a^2$，

解得 $a=-1$ 或 $a=4$(舍去)，

∴ 二次函数的表达式为 $y=-x^2+3x-2$.

关键点拨

(2)(ii)由抛物线的对称性得到 $x_1+x_2=3$ 是解题的关键.

(ii)【证明】∵ 点 $M(x_1,m)$ 和 $N(x_2,m)$ 在该二次函数图象上，∴ $m=-x_1^2+3x_1-2$，$\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{3}{2}$，

∴ $x_1+x_2=3$，

$$\therefore \frac{(x_1-1)^2}{m}-\frac{x_2-2}{x_1-2}=\frac{(x_1-1)^2(x_1-2)-m(x_2-2)}{m(x_1-2)}$$
$$=\frac{(x_1-1)(x_1^2-3x_1+2)-m(x_2-2)}{m(x_1-2)}$$
$$=\frac{-m(x_1-1)-m(x_2-2)}{m(x_1-2)}$$
$$=\frac{-(x_1-1)-(x_2-2)}{x_1-2}$$
$$=\frac{-(x_1+x_2)+3}{x_1-2}$$
$$=\frac{-3+3}{x_1-2}$$
$$=0,$$
$$\therefore \frac{(x_1-1)^2}{m}=\frac{x_2-2}{x_1-2}.$$

6. D 【解析】由题意可得，方程 $ax^2-2ax+a-3=0(a\neq0)$的两根异号，∴ $x_1x_2=\frac{a-3}{a}<0$，解得 $0<a<3$，∴ 二次项系数 $a>0$，∴ 图象开口向上，故A不符合题意；∵ 抛物线 $y=ax^2-2ax+a-3(a\neq0)$的对称轴为直线 $x=-\frac{-2a}{2a}=1$，∴ 当 $x>1$ 时，y 的值随 x 值的增大而增大，故B不符合题意；∵ 当 $x=1$ 时，$y=a-2a+a-3=-3$，∴ 函数的最小值为-3，故C不符合题意；当 $x=2$ 时，$y=4a-4a+a-3=a-3$. ∵ $0<a<3$，∴ $a-3<0$，即当 $x=2$ 时，$y<0$，故D符合题意. 故选D.

7. B 【解析】$y=-x^2+2x+\frac{7}{4}=-(x-1)^2+1+$

$\frac{7}{4}=-(x-1)^2+\frac{11}{4}$. ∵ $-1<0$, ∴ 当 $x=1$ 时, y 取最大值, 最大值为 $\frac{11}{4}$, 即水流喷出的最大高度是 2. 75 m, 故选 B.

8. 46. 4 【解析】设矩形菜地在射线 OA 上的一段长为 x m, 矩形菜地的面积为 S m². ①当 $x\leqslant 8$ 时, $S=x\cdot\frac{16-x-1.4+5}{2}=-\frac{1}{2}x^2+9.8x=-\frac{1}{2}(x-9.8)^2+48.02$. ∵ $-\frac{1}{2}<0$, ∴ 当 $x=8$ 时, $S_{最大}=46.4$. ②当 $x>8$ 时, $S=x\cdot\left(\frac{16+6.6+5}{2}-x\right)=-x^2+13.8x=-(x-6.9)^2+47.61$, 在 $x>8$ 的范围内, S 均小于 46. 4. 综上, 该菜地的最大面积为 46. 4 m². 故答案为 46. 4.

▶**思路分析** 要利用围墙和围栏围成一块面积最大的封闭的矩形菜地, 就必须尽量多地使用围墙. 设矩形菜地在射线 OA 上的一段长为 x m. x 可能小于等于 AO 的长, 也可能大于 AO 的长, 所以分两种情况进行讨论.

9.【解】(1) 设 A 款"哪吒"纪念品每个进价为 x 元, B 款"哪吒"纪念品每个进价为 y 元.

由题意得, $\begin{cases}200x+300y=14\ 000,\\100x+200y=8\ 000,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=40,\\y=20.\end{cases}$

答: A 款"哪吒"纪念品每个进价为 40 元, B 款"哪吒"纪念品每个进价为 20 元.

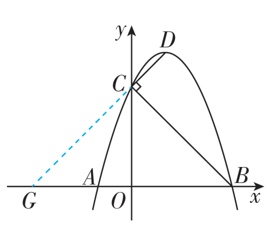
(2) 设需要购进 B 款纪念品 m 个, 则需要购进 A 款纪念品 $(400-m)$ 个. 由题意得, $40(400-m)+20m\leqslant 12\ 000$, 解得 $m\geqslant 200$, ∴ m 的最小值为 200.

答: 至少需要购进 B 款纪念品 200 个.

(3) 由题意得, $W=(a-40)[200-5(a-60)]=-5(a-70)^2+4\ 500$. ∵ $-5<0$, $60\leqslant a\leqslant 100$, ∴ 当 $a=70$ 时, W 有最大值, 最大值为 4 500.

10.【解】(1) ∵ $A(-1,0)$, $B(3,0)$, ∴ $y=-(x+1)\cdot(x-3)=-x^2+2x+3$.

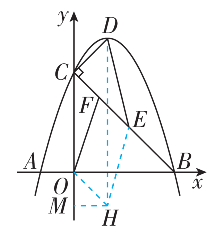
(2) ①把 $x=0$ 代入 $y=-x^2+2x+3$, 得 $y=3$, ∴ $C(0,3)$. 如图 (1), 延长 DC 与 x 轴相交于点 G. ∵ $B(3,0)$, $C(0,3)$, ∴ $OB=OC=3$. ∵ $\angle COB=90°$, ∴ $\angle CBO=45°$. ∵ $\angle DCB=90°=\angle BCG$, ∴ $\angle CGB=90°-\angle CBO=90°-45°=45°$, ∴ $\angle GCO=180°-\angle COG-\angle CGB=180°-90°-45°=45°$, ∴ $OG=OC=3$, ∴ $G(-3,0)$. 设直线 CG 的表达式为 $y=kx+m(k\neq 0)$, 把 $C(0,3)$, $G(-3,0)$ 代入, 得 $\begin{cases}3=m,\\0=-3k+m,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=1,\\m=3,\end{cases}$ ∴ 直线 CG 的表达式为 $y=x+3$. ∵ 点 D 是直线 CG 与抛物线的交点, ∴ 联立得 $\begin{cases}y=x+3,\\y=-x^2+2x+3,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=0,\\y=3\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=1,\\y=4,\end{cases}$ ∴ $D(1,4)$.



图(1)

▶**思路分析** (2) ①延长 DC 与 x 轴交于点 G, 求出直线 CG 的表达式, 与抛物线的表达式联立, 即可求出点 D 的坐标.

②如图 (2), 过点 O 作 $OH/\!/EF$, 且 $OH=EF=\sqrt{2}$, 连接 HE, DH. ∵ $OH/\!/EF$, 且 $OH=EF$, ∴ 四边形 $OFEH$ 是平行四边形, ∴ $OF=EH$. 过点 H 作 $HM\perp y$ 轴于 M. ∵ $\angle CBO=45°$, ∴ $\angle BOH=45°$, ∴ $\angle OHM=45°$, ∴ $OM=MH=\frac{\sqrt{2}}{2}OH=1$, ∴ $H(1,-1)$. ∵ $D(1,4)$, ∴ $DH=5$, 且 $DH\perp x$ 轴. ∵ $DE+EH\geqslant DH$, ∴ 当点 D, E, H 共线时, $DE+EH$ 的值最小, 即 $OF+DE$ 的值最小, 此时点 F 的坐标为 $(0,3)$, 与点 C 重合, 满足 EF 在线段 BC 上, ∴ $DE+OF$ 的最小值为 5.



图(2)

刷章测

1. B 【解析】由表格可知, 二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象的对称轴是直线 $x=\frac{1+3}{2}=2$, ∴ $x=4$ 时对应的 y 值和 $x=0$ 时对应的 y 值相等. ∵ $x=0$ 时, $y=10$, ∴ $x=4$ 时, $y=10$, 故选 B.

2. C 【解析】由 $ac>0$ 可知 a, c 同号, 故排除 D 选项. 由 $b^2>4ac$, 即 $b^2-4ac>0$ 可知, 抛物线与 x 轴有两个不同的交点, 故排除 A 选项. 由 $a-b+c<0$ 可知, 当 $x=-1$ 时, $y<0$, 故排除 B 选项. 故满足条件的图象可能是 C 选项. 故选 C.

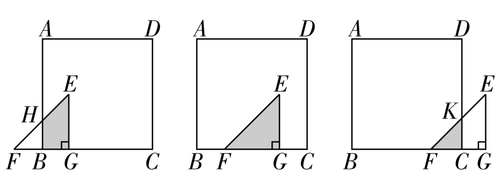
3. C 【解析】$y=(x-a-1)(x-a+1)-2a+9=x^2-2ax+a^2-2a+8$. 由题意得, $\Delta=(-2a)^2-4(a^2-2a+8)<0$, 解得 $a<4$. ∵ 抛物线的对称轴为直线 $x=-\frac{-2a}{2}=a$, 抛物线开口向上, 且当 $x<-2$ 时, y 随 x 的增大而减小, ∴ $a\geqslant -2$, ∴ 实数 a 的取值范围是 $-2\leqslant a<4$. 故选 C.

4. C 【解析】二次函数 $y=ax^2+bx-3a$ 的图象向右平移 3 个单位后对应的图象的函数表达式为 $y=a(x-3)^2+b(x-3)-3a$. ∵ 平移后的函数图象经过原点, ∴ $a(0-3)^2+b(0-3)-3a=0$, ∴ $b=2a$, ∴ 二次函数 $y=ax^2+bx-3a$ 的对称轴为直线 $x=-\frac{b}{2a}=-\frac{2a}{2a}=-1$. ①当 $a>0$ 时, ∵ 当 $-4\leqslant x\leqslant 0$ 时, y 有最小值 -2, ∴ 当 $x=-1$

时，$y=-2$，$\therefore a-b-3a=-2$，即$-b-b=-2$，解得$b=1$；②当$a<0$时，$\because$当$-4\leqslant x\leqslant 0$时，y有最小值-2，$-1-(-4)>0-(-1)$，$\therefore$当$x=-4$时，$y=-2$，$\therefore 16a-4b-3a=-2$，即$16\times\frac{1}{2}b-4b-3\times\frac{1}{2}b=-2$，解得$b=-\frac{4}{5}$．综上所述，$b$的值为$-\frac{4}{5}$或1．故选C．

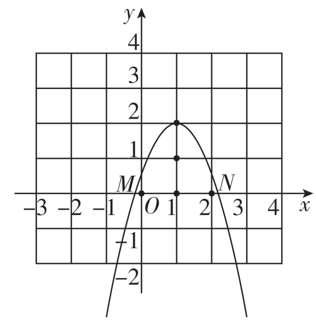
易错警示 a的值未知，故需分$a>0$和$a<0$进行讨论，避免漏解．

5. A 【解析】当点F与点B重合时，$t=4\div 2=2(s)$，当点G与点C重合时，$t=8\div 2=4(s)$，当点F与点C重合时，$t=(4+8)\div 2=6(s)$．分情况讨论：①当$0\leqslant t<2$时，如图(1)，重叠部分为梯形$BGEH$．由题意得，Rt$\triangle EFG$是等腰直角三角形，$\therefore\angle F=45°$，$\therefore BF=BH$．$\because BG=2t$，$\therefore BF=BH=FG-BG=4-2t$，$\therefore y=\frac{1}{2}(BH+EG)\cdot BG=\frac{1}{2}(4-2t+4)\cdot 2t=-2t^2+8t$．此时函数图象为开口向下的抛物线的一部分．②当$2\leqslant t\leqslant 4$时，如图(2)，重叠部分为$\triangle EGF$，$\therefore y=\frac{1}{2}EG\cdot FG=\frac{1}{2}\times 4\times 4=8$，为定值，此时函数图象为直线的一部分．③当$4<t\leqslant 6$时，如图(3)，重合部分为$\triangle FCK$，此时$CF=CK=4-(2t-8)=12-2t$，$\therefore y=\frac{1}{2}FC\cdot CK=\frac{1}{2}(12-2t)^2=2(6-t)^2$，此时函数图象为开口向上的抛物线的一部分．综上，符合题意的只有选项A．故选A．

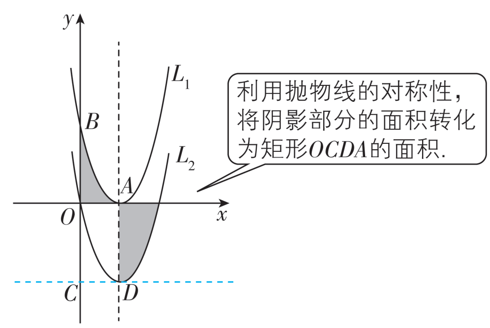


图(1)　图(2)　图(3)

6. B 【解析】抛物线$y=ax^2-2ax+a+2=a(x-1)^2+2(a<0)$，故抛物线的对称轴为直线$x=1$，顶点坐标为$(1,2)$，且开口向下，则$M$和$N$两点关于直线$x=1$对称．根据题意，抛物线在$M,N$之间的部分与线段$MN$所围的区域(包括边界)恰有5个整点，则这些整点是$(0,0)$，$(1,0)$，$(1,1)$，$(1,2)$，$(2,0)$，如图所示．当$x=0$时，$y=a+2$；当$x=-1$时，$y=4a+2$．由上可得$\begin{cases}0\leqslant a+2<1,\\4a+2<0,\end{cases}$解得$-2\leqslant a<-1$，故选B．



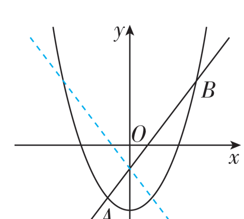
7. 2 【解析】如图，过抛物线L_2的顶点D作$CD//x$轴，与y轴交于点C．根据平移的性质及抛物线的对称性得到阴影部分的面积等于矩形$OCDA$的面积，$\therefore S_{阴影部分}=S_{矩形OCDA}=OA\cdot AD=1\times 2=2$．



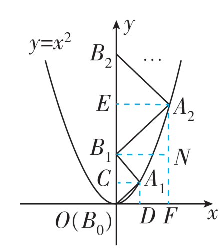
关键点拨 设商户每天销售纪念品获得的利润为w元，每个纪念品的售价为x元．根据题意得到w关于x的函数表达式及x的取值范围是解题的关键．

8. 52 【解析】设商户每天销售纪念品获得的利润为w元，每个纪念品的售价为x元，则$w=(x-40)\left(300-\frac{x-44}{2}\times 20\right)=(x-40)(-10x+740)=-10x^2+1\ 140x-29\ 600=-10(x-57)^2+2\ 890$．$\because -10<0$，$44\leqslant x\leqslant 52$，$\therefore$当$x=52$时，$w$有最大值．故答案为52．

9. $x<-3$或$x>1$ 【解析】$\because$抛物线$y=ax^2+c$与直线$y=mx+n$交于$A(-1,p)$，$B(3,q)$两点，$\therefore$抛物线$y=ax^2+c$与直线$y=-mx+n$交于$(1,p)$，$(-3,q)$两点，如图，观察函数图象可知，当$x<-3$或$x>1$时，抛物线$y=ax^2+c$在直线$y=-mx+n$的上方，$\therefore$不等式$ax^2+c>-mx+n$的解集为$x<-3$或$x>1$，即不等式$ax^2+mx+c>n$的解集是$x<-3$或$x>1$．故答案为$x<-3$或$x>1$．



(第9题图)



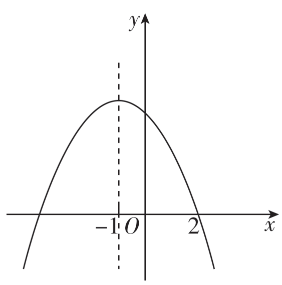
(第10题图)

10. $2\ 024\sqrt{2}$ 【解析】如图，作$A_1C\perp y$轴，$A_2E\perp y$轴，垂足分别为C,E，作$A_1D\perp x$轴，$A_2F\perp x$轴，垂足分别为D,F．$\because\triangle A_1B_0B_1$，$\triangle A_2B_1B_2$都是等腰直角三角形，$\therefore B_1C=B_0C=DB_0=A_1D$，$B_2E=B_1E$．设$A_1(a,b)$，则

$a=b$，将其代入表达式 $y=x^2$，得 $a=a^2$，解得 $a=0$（不符合题意，舍去）或 $a=1$，$\therefore B_1B_0=2$. 由勾股定理得 $A_1B_0=\sqrt{2}$. 过 B_1 作 $B_1N\perp A_2F$ 于 N. 设点 $A_2(x_2,y_2)$，可得 $A_2N=y_2-2$，$B_1N=x_2=y_2-2$. 又$\because$ 点 A_2 在抛物线上，$\therefore y_2=x_2^2$，$\therefore x_2+2=x_2^2$，解得 $x_2=2$ 或 $x_2=-1$（不合题意，舍去），$\therefore A_2B_1=2\sqrt{2}$. 同理可得 $A_3B_2=3\sqrt{2}$，$A_4B_3=4\sqrt{2}$，…，$\therefore A_{2\,024}B_{2\,023}=2\,024\sqrt{2}$，$\therefore$ $\triangle A_{2\,024}B_{2\,023}B_{2\,024}$ 的腰长为 $2\,024\sqrt{2}$.

思路分析 依据题意，利用等腰直角三角形的性质及点的坐标的关系求出第一个等腰直角三角形的腰长，用类似的方法求出第二个、第三个、…的腰长，观察其规律，最后得出结果.

11. ①③ 【解析】依照题意，画出函数图象如图. ①$\because$ 抛物线的顶点坐标为 $(-1,n)$，$\therefore$ 对称轴为直线 $x=-\dfrac{b}{2a}=-1$，$\therefore b=2a$. 将 $(2,0)$ 代入抛物线的表达式，得 $4a+2b+c=0$，$\therefore c=-8a$. $\because 0<c<1$，$\therefore 0<-8a<1$，$\therefore -\dfrac{1}{8}<a<0$，故①正确. $\because$ 方程 $ax^2+bx+c-n-k=0$ 有两个不相等的实数根，$\therefore$ 抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与直线 $y=n+k$ 有两个交点. $\because$ 抛物线的顶点坐标为 $(-1,n)$，$\therefore n+k<n$，$\therefore k<0$，故②错误. 观察图象可知，抛物线上的点距离对称轴越近，其纵坐标越大；距离对称轴越远，其纵坐标越小. $\because$ 抛物线的对称轴为直线 $x=-1$，且 $|x_1+1|>|x_2+1|$，$\therefore$ 点 P_1 到对称轴的距离比点 P_2 到对称轴的距离大，$\therefore y_1<y_2$，故③正确. $\because$ 抛物线的顶点坐标为 $(-1,n)$，$\therefore$ 抛物线表达式为 $y=a(x+1)^2+n=ax^2+2ax+a+n$. 联立得 $\begin{cases}y=kx+1,\\y=ax^2+2ax+a+n,\end{cases}$ 整理得 $ax^2+(2a-k)x+a+n-1=0$，$\therefore \Delta=(2a-k)^2-4a(a+n-1)=k^2-4ak+4a-4an$. $\because$ 无法判断 Δ 是否大于 0，$\therefore$ 无法判断函数 $y=kx+1$ 的图象与 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$ 的图象的交点个数，故④错误. 综上，①③正确，故答案为①③.



12. 【解】(1) 把点 $(3,3)$ 代入 $y=x^2-2ax+1-a$，解得 $a=1$，$\therefore$ 二次函数表达式是 $y=x^2-2x=(x-1)^2-1$，$\therefore$ 抛物线的顶点坐标为 $(1,-1)$.

(2) 当二次函数图象与坐标轴有两个交点时，抛物线顶点在 x 轴上或者抛物线经过原点.

①抛物线顶点在 x 轴上，即抛物线与 x 轴有唯一交点，$\therefore$ 对于方程 $x^2-2ax+1-a=0$，$\Delta=(-2a)^2-4(1-a)=0$，解得 $a=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$.

②抛物线经过原点，即 $1-a=0$，解得 $a=1$. 当 $a=1$ 时，对于方程 $x^2-2x=0$，$\Delta=4>0$，满足题意.

综上所述，a 的值为 $\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ 或 $\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$ 或 1.

关键点拨 (2) 图象与坐标轴有两个交点，需分两种情况进行讨论：抛物线顶点在 x 轴上；抛物线经过原点.

(3) $\because$ 点 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$ 是函数 $y=x^2-2ax+1-a$ 图象上的两个点，$\therefore y_1=x_1^2-2ax_1+1-a$，$y_2=x_2^2-2ax_2+1-a$，$\therefore y_1+y_2=x_1^2+x_2^2-2a(x_1+x_2)+2-2a$. $\because x_1+x_2=-1$，$\therefore x_2=-1-x_1$，$\therefore y_1+y_2=x_1^2+(-1-x_1)^2+2a-2a+2=2x_1^2+2x_1+3=2\left(x_1+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{5}{2}\geqslant\dfrac{5}{2}$. $\because$ 点 A,B 是函数图象上两个不同的点，$\therefore x_1\neq x_2\neq-\dfrac{1}{2}$，$\therefore y_1+y_2>\dfrac{5}{2}$.

13. 【解】(1) 由题可设 $y=at^2+bt+c(a\neq0)$. 将 $(0,0)$，$(1,27)$，$(2,48)$ 代入 $y=at^2+bt+c(a\neq0)$，得 $\begin{cases}c=0,\\a+b+c=27,\\4a+2b+c=48,\end{cases}$ $\therefore \begin{cases}a=-3,\\b=30,\\c=0,\end{cases}$ $\therefore y=-3t^2+30t$.

(2) $\because y=-3t^2+30t=-3(t-5)^2+75$，$\therefore$ 当 $t=5$ 时，y 有最大值，最大值为 75，$\therefore$ 汽车刹车 5 s 后，汽车完全停止. $\because 4<5$，$\therefore$ 当 $t=4$ 时，$y=-3\times4^2+30\times4=72$.

答：汽车刹车 4 s 后，行驶了 72 m.

(3) 不会. 理由：由(2)得，从汽车刹车后到汽车完全停止，汽车行驶的距离是 75 m. $\because 75<80$，$\therefore$ 该汽车在不变道的情况下不会撞到抛锚的车.

14. 【解】(1) $\because$ 抛物线 $y=-\dfrac{1}{2}x^2+bx+c$ 与 y 轴交于点 $C(0,2)$，对称轴是直线 $x=-\dfrac{3}{2}$，

$\therefore \begin{cases}-\dfrac{b}{2\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)}=-\dfrac{3}{2},\\c=2,\end{cases}$ $\therefore \begin{cases}b=-\dfrac{3}{2},\\c=2,\end{cases}$ $\therefore$ 该抛物线的表达式为 $y=-\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{3}{2}x+2$.

(2) 在 $y=-\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{3}{2}x+2$ 中，令 $y=0$，则 $-\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{3}{2}x+2=0$，解得 $x_1=-4$，$x_2=1$，$\therefore A(-4,0)$，$B(1,0)$. 设直线 AC 的表达式为 $y=kx+b_1(k\neq0)$，将 $A(-4,0)$，$C(0,2)$ 代入直线表达式可得 $\begin{cases}-4k+b_1=0,\\b_1=2,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=\dfrac{1}{2},\\b_1=2,\end{cases}$ $\therefore$ 直线 AC 的表达式为 $y=\dfrac{1}{2}x+2$. 设

$M\left(m,-\frac{1}{2}m^2-\frac{3}{2}m+2\right)(-4<m<0)$，则 $N\left(m,\frac{1}{2}m+2\right)$，$Q\left(-m^2-3m,-\frac{1}{2}m^2-\frac{3}{2}m+2\right)$，$\therefore MN=-\frac{1}{2}m^2-\frac{3}{2}m+2-\left(\frac{1}{2}m+2\right)=-\frac{1}{2}m^2-2m$，$MQ=-m^2-3m-m=-m^2-4m$，$\therefore MN+MQ=-\frac{1}{2}m^2-2m+(-m^2-4m)=-\frac{3}{2}m^2-6m=-\frac{3}{2}(m^2+4m)=-\frac{3}{2}(m+2)^2+6.\because -\frac{3}{2}<0$，$\therefore$ 当 $m=-2$ 时，$MN+MQ$ 的值最大，最大值为 6.

(3) 由题意可设 $E\left(t,-\frac{1}{2}t^2-\frac{3}{2}t+2\right)$，$D(s,0)$. $\because$ 平面内以点 A,D,C,E 为顶点的四边形是平行四边形，$A(-4,0)$，$C(0,2)$，$\therefore$ 当 AC 为对角线时，由平行四边形的性质可得 $\begin{cases}t+s=-4+0,\\-\frac{1}{2}t^2-\frac{3}{2}t+2+0=0+2,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}t=-3,\\s=-1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}t=0,\\s=-4\end{cases}$（舍去），此时点 E 的坐标为 $(-3,2)$.

思路分析 (3) 分三种情况讨论：当 AC 为对角线时；当 AC 为边，四边形 $ADEC$ 为平行四边形时；当 AC 为边，四边形 $AEDC$ 为平行四边形时. 分别利用平行四边形的性质求解即可.

当 AC 为边，四边形 $ADEC$ 为平行四边形时，由平行四边形的性质可得 $\begin{cases}t+(-4)=s+0,\\-\frac{1}{2}t^2-\frac{3}{2}t+2+0=0+2,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}t=-3,\\s=-7\end{cases}$ 或 $\begin{cases}t=0,\\s=-4\end{cases}$（舍去），此时点 E 的坐标为 $(-3,2)$.

当 AC 为边，四边形 $AEDC$ 为平行四边形时，由平行四边形的性质可得 $\begin{cases}t+0=-4+s,\\-\frac{1}{2}t^2-\frac{3}{2}t+2+2=0+0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}t=\frac{-3+\sqrt{41}}{2},\\s=\frac{5+\sqrt{41}}{2}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}t=\frac{-3-\sqrt{41}}{2},\\s=\frac{5-\sqrt{41}}{2},\end{cases}$ 此时点 E 的坐标为 $\left(\frac{-3+\sqrt{41}}{2},-2\right)$ 或 $\left(\frac{-3-\sqrt{41}}{2},-2\right)$. 综上所述，点 E 的坐标为 $(-3,2)$ 或 $\left(\frac{-3+\sqrt{41}}{2},-2\right)$ 或 $\left(\frac{-3-\sqrt{41}}{2},-2\right)$.

第三章　圆

1　圆

刷基础

1. C　【解析】确定一个圆需要两个条件：圆心和半径. 故选 C.

2. B　【解析】四个顶点可在同一个圆上的四边形，一定有一点到它的四个顶点的距离都相等，因而 A、C、D 都是错误的. $\because$ 矩形对角线相等且互相平分，$\therefore$ 四个顶点到对角线交点的距离相等，$\therefore$ 矩形四个顶点一定可在同一个圆上. 故选 B.

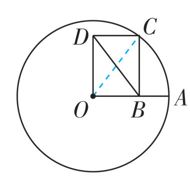
3. C　【解析】直径是最长的弦，①正确；直径是弦，但弦不一定是直径，②错误；半径相等的两个半圆是等弧，③正确；长度相等的两条弧不一定是等弧，④错误；半径相等的两个圆是等圆，⑤正确. 故选 C.

4. B　【解析】题图中的弦有 AB，CE，BC. 故选 B.

5. A　【解析】$\because AB$ 是 $\odot O$ 的弦，$\odot O$ 的半径为 6 cm，$\therefore \odot O$ 的直径为 12 cm，$\therefore$ 0 cm$<AB\leq$12 cm，$\therefore$ 弦 AB 的长不可能为 13 cm. 故选 A.

6. A　【解析】$\because OA=OB$，$\angle OAB=25°$，$\therefore \angle OBA=\angle OAB=25°$，$\therefore \angle AOB=180°-\angle OAB-\angle OBA=130°$. $\because OA=OC$，$\angle OCA=40°$，$\therefore \angle OAC=\angle OCA=40°$，$\therefore \angle AOC=180°-\angle OAC-\angle OCA=100°$，$\therefore \angle BOC=\angle AOB-\angle AOC=130°-100°=30°$，故选 A.

7. 4　【解析】如图，连接 OC.



$\because$ 四边形 $OBCD$ 是矩形，

$\therefore \angle OBC=90°$，$OB=CD=6$，

$\therefore OC=OA=\sqrt{BC^2+OB^2}=10$，

$\therefore AB=OA-OB=4$，故答案为 4.

刷有所得 同一圆中的半径始终相等，所以由圆的半径作为两边的三角形必为等腰三角形.

8.【解】$\because CD=OA$，$OA=OD$，$\therefore CD=OD$，

$\therefore \angle DOC=\angle C=23°$，

$\therefore \angle EDO=\angle C+\angle DOC=23°+23°=46°$.

$\because OD=OE$，$\therefore \angle OED=\angle ODE=46°$，

$\therefore \angle EOB=\angle C+\angle OEC=23°+46°=69°$.

归纳总结 记点到圆心的距离为 d，圆的半径为 r，$d>r$ 说明点在圆外，$d=r$ 说明点在圆上，$d<r$ 说明点在圆内.

9. C　【解析】